Iniciação à Estatística

Prof. Fernando de Souza Bastos
fernando.bastos@ufv.br

Departamento de Estatística
Universidade Federal de Viçosa
Campus UFV - Viçosa

Sumário

1. Probabilidade Condicional e Independência
2. Teorema de Bayes

Para dois eventos quaisquer A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A dado B, como sendo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

Assim, a probabilidade de A muda após o evento B ter acontecido. Isso porque o resultado de A é uma das possibilidades de B ou de B^c.

Exemplo

Considere-se um baralho de 52 cartas. A probabilidade de ao retirar uma carta sair um rei é $4/52$, ou $1/13$. No entanto, se alguém retira uma carta e nos diz que é uma figura, então a probabilidade de a carta retirada ser um rei é $4/12 = 1/3$, ou seja, $P(\text{sair um rei}|\text{sair uma figura}) = 1/3$.

Exemplo

Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

a) Ambas pretas?

Exemplo

Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

a) Ambas pretas?
$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) \times P(P_2|P_1)$$

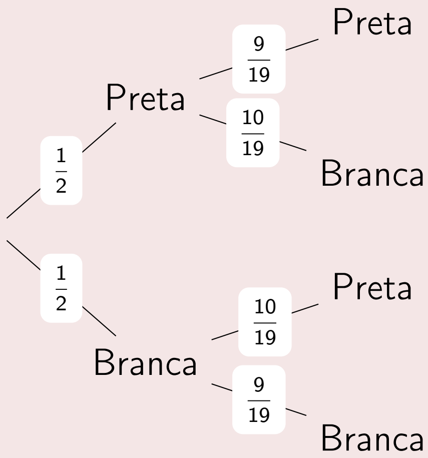
b) Segunda ser preta?

Exemplo

Uma urna contém 10 bolas brancas e 10 bolas pretas. Retiro sucessivamente 2 bolas, sem reposição. Qual é a probabilidade de:

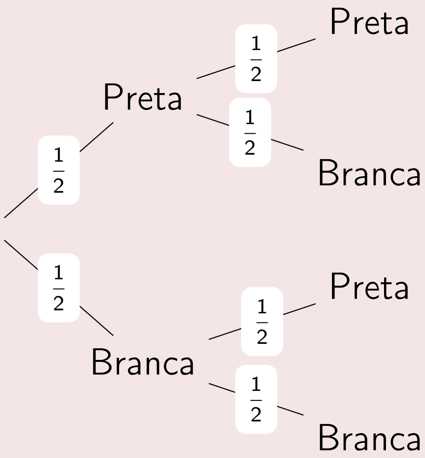
a) Ambas pretas?
$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) \times P(P_2|P_1)$$

b) Segunda ser preta?
$$P(P_2) = P[(P_1 \cap P_2) \cup (P_2 \cap P_2)]$$


Preta
9/19
Preta
10/19
1/2
Branca
1/2
Preta
10/19
Branca
9/19
Branca

Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{9}{38}$
BP	$\frac{10}{38}$
PB	$\frac{10}{38}$
PP	$\frac{9}{38}$
Total	1

Figura: Com reposição



Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{1}{4}$
BP	$\frac{1}{4}$
PB	$\frac{1}{4}$
PP	$\frac{1}{4}$
Total	1

Observem que, neste segundo caso, $P(B_2|B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. Ou seja,

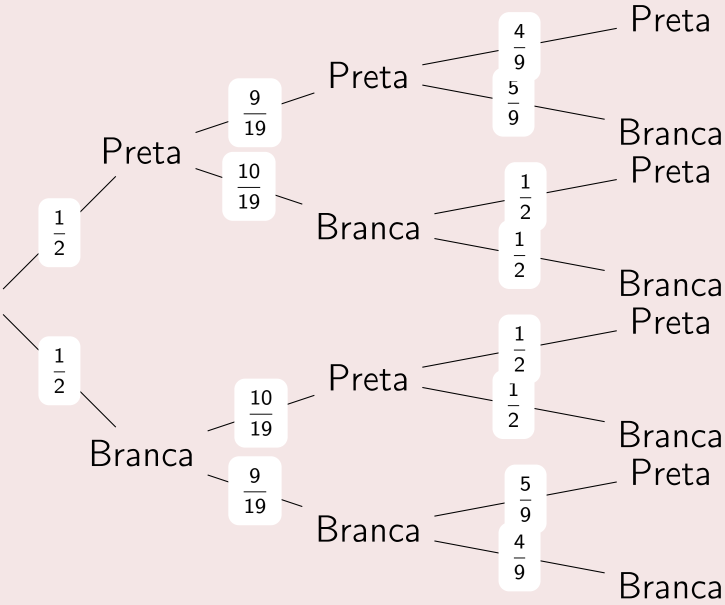
$$P(A|B) = P(A) \text{ ou } P(B|A) = P(B).$$

Nesse caso, dizemos que o evento A independe do evento B e, usando (1), temos que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{2}$$

É fácil ver que se A independe de B, então B independe de A. A fórmula acima pode ser tomada como definição de independência entre dois eventos, ou seja, A e B são independentes se, e somente se, (2) for válida.

Considere ainda a urna dos exemplos anteriores, mas vamos fazer três extrações sem reposição. Indiquemos por P_i ou B_i a obtenção de bola preta ou branca na i-ésima extração, respectivamente, $i = 1, 2, 3$.



1/2
Preta
9/19
10/19
Preta
4/9
Preta
5/9
Branca
Branca
1/2
Preta
1/2
Branca
1/2
Branca
10/19
9/19
Preta
1/2
Preta
1/2
Branca
Branca
5/9
Preta
4/9
Branca

Resultados	Probabilidades
BBB	$0,105263158$
BBP	$0,131578947$
BPB	$0,131578947$
PBB	$0,131578947$
BPP	$0,131578947$
PBP	$0,131578947$
PPB	$0,131578947$
PPP	$0,105263158$
Total	1

Observem que:

$$\begin{aligned}
P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= P(B_1) \times P(B_2|B_1) \times P(B_3|B_1 \cap B_2) && (3)\\
&= \frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{8}{18} && (4)\\
&= \frac{1}{2} \times \frac{9}{19} \times \frac{4}{9} && (5)\\
&= 0,105263158 && (6)
\end{aligned}$$

De modo geral, dados três eventos A, B e C, temos que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$$

Essa relação pode ser estendida para um número finito qualquer de eventos.

Dizemos que os eventos A, B e C são independentes se, e somente se:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned} \tag{7}$$

Se apenas as três primeiras relações de (7) estiverem satisfeitas, dizemos que os eventos A, B e C são mutuamente independentes. É possível que três eventos sejam mutuamente independentes, mas não sejam completamente independentes.

Teorema de Bayes

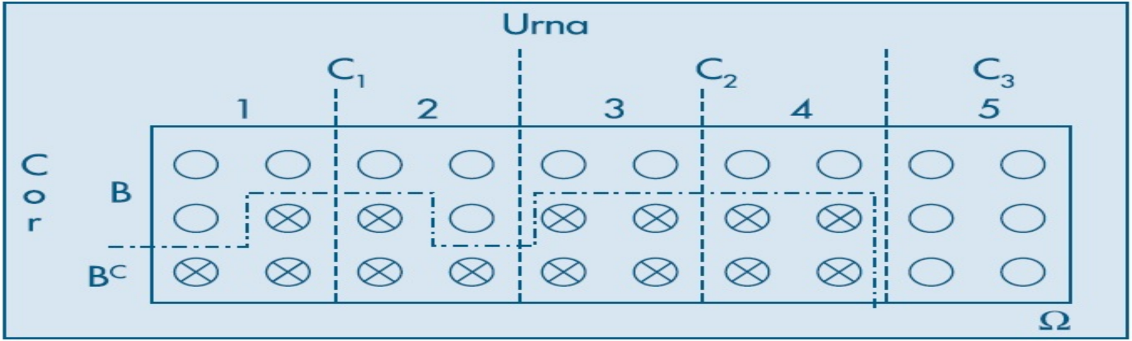
Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo Teorema de Bayes. A versão mais simples desse teorema é dada pela fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \tag{8}$$

Observe que $P(A|B) > P(A)$ se $P(B|A) > P(B)$.

Exemplo 5.14

Temos cinco urnas, cada uma com seis bolas. Duas dessas urnas (tipo C_1) têm 3 bolas brancas, duas outras (tipo C_2) têm 2 bolas brancas, e a última urna (tipo C_3) tem 6 bolas brancas. Escolhemos uma urna ao acaso e dela retiramos uma bola. Qual a probabilidade de a urna escolhida ser do tipo C_3, sabendo-se que a bola sorteada é branca?



Queremos encontrar $P(C_3|B)$, sabendo que

$$P(C_1) = 2/5, \ P(B|C_1) = 1/2$$
$$P(C_2) = 2/5, \ P(B|C_2) = 1/3$$
$$P(C_3) = 1/5, \ P(B|C_3) = 1$$

Da definição de probabilidade condicional, temos

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C_3)P(B|C_3)}{P(B)}$$

Precisamos encontrar o valor de $P(B)$, já que o numerador é conhecido. Como C1, C2 e C3 são eventos mutuamente exclusivos, e reunidos formam o espaço amostral completo, podemos decompor o evento B na reunião de três outros, também mutuamente exclusivos, como $B = (C_1 \cap B) \cup (C_2 \cap B) \cup (C_3 \cap B)$, então:

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(C_1 \cap B) + P(C_2 \cap B) + P(C_3 \cap B) \\
&= P(C_1)P(B|C_1) + P(C_2)P(B|C_2) + P(C_3)P(B|C_3) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 1 \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$P(C_3|B) = \frac{P(C_3)P(B|C_3)}{P(B)} \tag{9}$$

$$= \frac{1/5 \times 1}{8/15} \tag{10}$$

$$= \frac{3}{8} \tag{11}$$

Referências Bibliográficas