# Waloddi Weibull

**Larissa Ribeiro Moreira**
Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal
Rodovia LMG - 818, km 06 s/n, Florestal-MG, CEP: 35690-000
larissa.r.moreira@ufv.br

## Introdução

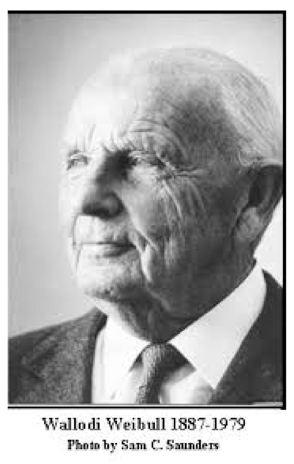


**Figura 1:** *Waloddi Weibull*

Ernst Hjalmar Waloddi Weibull foi um engenheiro e matemático sueco. É reconhecido pelo seu trabalho na área da fadiga de materiais e na estatística pelos seus estudos sobre a distribuição de Weibull.

A Distribuição de Weibull é uma distribuição de probabilidade contínua. Utilizando esta distribuição, realizou-se a modelagem bem sucedida de dados provenientes de grandes áreas de ciências física, biológica, social, ambiental e métodos baseados nesta distribuição são ferramentas indispensáveis para profissionais da engenharia de confiabilidade.

Em geral, suas aplicações visam a determinação do tempo de vida médio e da taxa de falhas em função do tempo da população analisada. É também de grande interesse para estatísticos devido a suas diversas características específicas. O sucesso da distribuição se justifica não só pela sua eficácia, mas também ao fato de existirem recursos gráficos que facilitam sua interpretação e por ser capaz de fazer previsões de acurácia razoável mesmo quando a quantidade de dados disponível é baixa.

## A Vida de Waloddi Weibull

Waloddi Weibull nasceu em uma família de imigrantes alemães originária de Schleswig-Holstein (Norte da Alemanha). Sua família conta com vários historiadores conhecidos, como Curt Weibull.

Ingressou em 1904 na marinha sueca, seguindo o curso no Real Instituto de Tecnologia em Estocolmo. Tornou-se professor em 1924, e, em 1932, concluiu o doutorado na Universidade de Upsália. Era também investigador e consultor de engenharia.

Em 1914, embarcou numa expedição em um navio de investigação científica *Albatroz*, pelo Mar Mediterrâneo, Mar das Caraíbas e no Oceano Pacífico. Escreveu seu primeiro artigo, sobre ondas explosivas. Este artigo consistia numa técnica baseada na explosão de cargas para caracterizar a natureza e espessura dos fundos oceânicos, técnica ainda hoje usada na exploração petrolífera offshore.

Em 1939, publicou o trabalho sobre a **Distribuição de Weibull**, utilizada em probabilidade e estatística. Em 1941 foi nomeado professor de física aplicada no Real Instituto de Tecnologia, graças à empresa de fabricação de armas *Bofors*. Publicou numerosos trabalhos em resistência dos materiais.

Em 1972, recebeu a Medalha ASME (mais significativo prêmio concedido pela *Sociedade dos Engenheiros Mecânicos dos Estados Unidos*) e recebeu também a grande medalha de ouro da *Academia Real das Ciências da Suécia* em 1978, pelo conjunto de seu trabalho e pelas mais de 70 publicações.

## Distribuição de Weibull

Proposta originalmente por W. Weibull em 1954, em estudos relacionados ao tempo de falha devido a fadiga dos metais, ela é frequentemente usada para descrever o tempo de vida de produtos industriais.

A sua popularidade em aplicações práticas deve-se ao fato dela apresentar uma grande variedade de formas, todas com uma propriedade básica: a sua função de taxa de falha é monótona. Isto é, ou ela é crescente ou decrescente ou constante.Por exemplo: ela descreve adequadamente a vida de mananciais, componentes eletrônicos, cerâmicas, capacitores e dielétricos.

**DEFINIÇÃO:** Uma variável aleatória $x$ segue a distribuição de Weibull se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x;\lambda,k)=\begin{cases}\frac{k}{\lambda}\left(\frac{\chi}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(\chi/\lambda)^k} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases} \qquad (1)$$

O parâmetro $\lambda$ está definido de $0$ a + $\infty$ e é medido na mesma unidade que $x$. Se $x$ tem unidade de tempo, $\lambda$ é denominado tempo característico, pois, a função de distribuição acumulada de qualquer distribuição de Weibull com parâmetros $\lambda$ idênticos e $k$ está livre, terá o valor de 0.6321 no ponto $x=\lambda$, o que significa, que a chance de sobrevivência de $x$ por $\lambda$ unidades de tempo, é aproximadamente 63.21% independente do valor de $k$. Do ponto de vista estatístico, $\lambda$ é determinado parâmetro de escala, pois, variações no seu valor, enquanto k é mantido constante, causam a compressão ou expansão do gráfico.

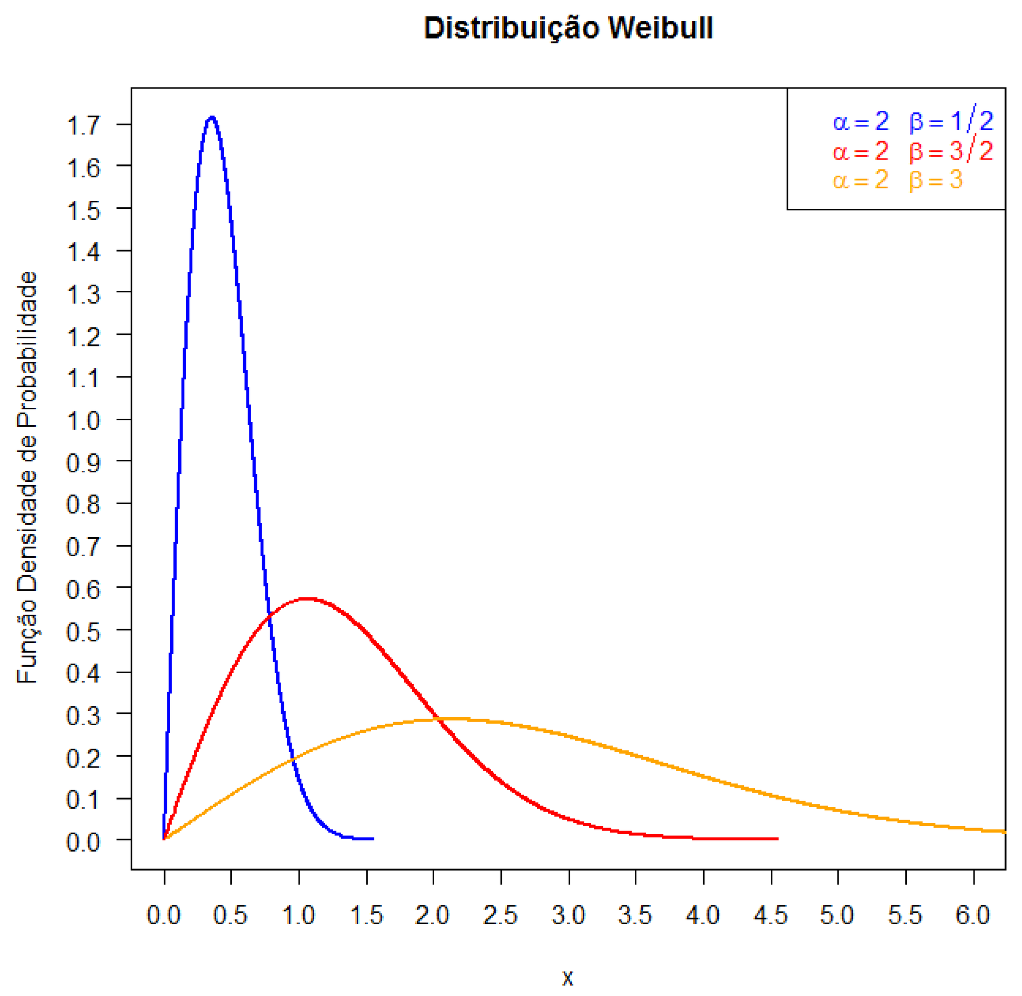


**Figura 2:** *Distribuição de Weibull para diferentes tipos de escala.*

**Função Densidade:**A forma da função densidade da distribuição de Weibull muda drasticamente com o valor de $k$. Para $0<k<1$, a função densidade tende a $\infty$ quando x se aproxima de zero por cima e é estritamente decrescente. Para $k=1$, a função densidade tende a $(1/\lambda)$ quando $x$ se aproxima de zero por cima, aumenta até seu modo e diminui depois disso. É interessante notar que a função densidade tem uma declividade infinitamente negativa em $x=0$ se $0<k<1$, declividade infinitamente positiva em $x=0$ se $1<k<2$ e declividade nula em $x=0$ se $k>2$. Para $k=2$ a função densidade tem uma declividade finita e positiva em $x=0$. Quando $k$ tende ao infinito, a distribuição de Weibull converge para uma distribuição delta de Dirac centrada em $x=\lambda$

**Função de Distribuição Acumulada** A função de distribuição acumulada é dada por

$$F(x;k,\lambda)=1-e^{-(x/\lambda)^k}$$

para $x\geqslant 0$ e $F(x;k,\lambda)=0$ para $x<0$.

O quantil da distribuição de Weibull é

$$Q(p;k,\lambda)=\lambda(-\ln(1-p))^{1/k}$$

para $0\leqslant p<1$.
A função hazard $h$ (taxa de falhas) é dada por

$$h(x;k,\lambda)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}$$

No contexto em que $x$ é interpretado como o "tempo transcorrido até falha"a distribuição de Weibull fornece a distribuição de probabilidades de um dispositivo ou material falhar em um dado intervalo de tempo. Como pode ser visto na definição da função hazard $h$, existe uma dependência exponencial com o parâmetro $k$ o que determina 3 comportamentos bem diferentes para:

$k<1$: alta taxa de falha no início. Esse comportamento típico de processos industriais em que a maioria das falhas ocorre no processo de produção dos itens ou quando a taxa de falha diminui com a eliminação da população defeituosa de dispositivos.

$k=1$: chance de falha independente do tempo e comportamento exponencialmente decrescente da distribuição. Processos "sem memória"em que as falhas ocorrem devido a razões aleatórias.
$k>1$: chance de falha crescente com o tempo. Casos em que há um processo de envelhecimento.

**Função Geradora de Momentos**: Uma variedade de expressões estão disponíveis para a função geradora de momentos de $X$. Como uma série de potências, dado que os momentos já são conhecidos, se tem

$$E\left[e^{tX}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\lambda^n}{n!}\Gamma\left(1+\frac{n}{k}\right)$$

Alternativamente, pode-se tentar resolver diretamente a integral

$$E\left[e^{tX}\right]=\int_0^{\infty}e^{tx}\frac{k}{\lambda}\left(\frac{X}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k}dx$$

## Aplicações

O campo de aplicações da distribuição de Weibull é vasto e abrange praticamente todas as áreas da ciência. Usando essa distribuição, realizou-se a modelagem bem sucedida de dados provenientes de grandes áreas de ciências física, biológica, social, saúde e ambiental.

**Engenharia de Confiabilidade**: Empresas da área de engenharia e tecnologia têm a necessidade de assegurar a confiabilidade e a vida útil de seus produtos originou-se o mercado da engenharia de confiabilidade no qual a análise de Weibull aparece como uma importante e poderosa ferramenta. Alguns exemplos de aplicação da Distribuição de Weibull estão na resistência de materiais e produtos, como: resistência a fratura do vidro, falha de compostos de fibra de carbono, falha em semicondutores de capacitores, confiabilidade de guias de ondas opticos para cabos e variabilidade de capacidade de carga de helicópteros.

**Outras Áreas**: Há varias outras aplicações da Distribuição de Weibull, como por exemplo: distribuição de velocidades dos ventos, magnitude de terremotos, análise da duração do desemprego, dinâmica de biomassa da folhagem do pinheiro escocês e incidência de câncer de pulmão em fumantes. E uma aplicação interessante usando a Distribuição de Weibull foi feita em São Paulo com título "A Distribuição de Weibull como Modelo de Sobrevivência de Insetos".

## Conclusão

Essa metodologia é uma forte ferramenta em diversas áreas, principalmente na Resistência dos Materiais, subarea da Engenharia, em aparelhos eletrônicos e equipamentos em geral. Com a escolha apropriada dos parâmetros dessa Distribuição, pode-se representar uma larga faixa de distribuições de modelos de faixas, podendo explicar sua grande aplicação não só na Engenharia, mas também na área de Ciências Biológicas, Matemática, Geologia, problemas Socias, etc.

## Agradecimentos

Agradeço aos meus colegas de turma, em especial, José Vitor, Augusto Meireles e Guilherme Castro por me ajudarem nas dificuldades que tive no desenvolvimento deste. Agradeço também ao professor Fernando Bastos pelo tema, pois foi uma pesquisa interessante e que me surpreendeu bastante.

## Referências

MANUTENÇÃO EM FOCO. Distribuição de Weibull. Disponível em: https://www.manutencaoemfoco.com.br/distribuicao-de-weibull/ acessado em 23 de Outubro de 2019.

PORTAL ACTION. Distribuição de Weibull. Disponível em: http://www.portalaction.com.br/probabilidades/613-distribuicao-weibull acessado em 02 de Novembro de 2019.

PORTAL ACTION. Confiabilidade da Distribuição de Weibull. Disponível em: http://www.portalaction.com.br/confiabilidade/412-distribuicao-de-weibull acessado em 23 de Outubro de 2019.

Sgrillo, R. B. "A distribuição de Weibull como modelo de sobrevivência de insetos."Ecossistema 7 (1982): 9-13.