Teste de Tukey

Renan Iana de Miranda

Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

renan.miranda@ufv.br

1. Introdução

Figura 1.1: John W. Tukey

John Wilder Tukey (JWT) - químico, topólogo, educador, consultor, cientista da informação, pesquisador, estatístico, analista de dados, executivo— Tukey nasceu em New Bedford, Massachusetts, em 16 de junho de 1915. Morreu de ataque cardíaco em 26 de julho de 2000 em New Brunswick, Nova Jersey. A morte seguiu de uma doença curta.

2. Vida Acadêmica

Ele era educado em casa até o início da faculdade. Ele obteve B.Sc. e M.Sc. em química pela Brown University e depois ele se formou em Princeton. Lá, obteve M.A. e Ph.D. em matemática. Em 1985, aos 70 anos, aposentou-se dos Laboratórios Bell Telephone e lecionou na Universidade de Princeton com uma "Sunset salvo".

Enquanto o trabalho de pós-graduação da JWT era principalmente em matemática pura, o advento da A Segunda Guerra Mundial o levou a se concentrar em problemas práticos enfrentados por sua nação e posteriormente revolucionar os métodos de análise de dados. Isso abrange quase tudo hoje em dia. No final da Guerra, iniciou uma carreira acadêmica industrial conjunta nos Laboratórios Bell Telephone, Murray Hill e Princeton Universidade. A ciência e a análise dos dados eram onipresentes. Mesmo após a aposentadoria seu trabalho técnico e científico continuou com um alto nível de criatividade.

3. Teste de Tukey (TSD - Tukey Significant Difference)

O Teste proposto por Tukey (1953) é também conhecido como teste de Tukey da diferença honestamente significativa e teste de Tukey da diferença totalmente significativa. É um teste exato em que, para a família de todas as $c = \frac{1}{2}k(k-1)$ comparações duas a duas, a taxa de erro da família dos testes (FWER) é exatamente α (e o intervalo de confiança é exatamente 1-α). Métodos de comparações múltiplas exatos são raros. O teste de Tukey tem sido mostrado analiticamente ótimo, no sentido que, entre todos os procedimentos que resultam em intervalos de confiança com mesmo tamanho para todas diferenças duas a duas com coeficiente de confiança da família de pelo menos $1-\alpha$, o teste de Tukey resulta em intervalos menores. Isso quer dizer que, se a família consiste em todas comparações duas a duas e o teste de Tukey pode ser usado, ele resultará em intervalos menores que qualquer outro método de comparação múltipla de uma etapa.

A estratégia de Tukey consiste em definir a menor diferença significativa. Tal procedimento utiliza a amplitude da distribuição studentizada.

Suponhamos que temos k observações independentes, $Y1,...,Yk$, de uma distribuição normal com média e variância σ^2. Seja w a amplitude para esse conjunto de observações, assim

$$w = \max(Y_i) - \min(Y_i).$$

Suponhamos que temos uma estimativa s^2 da variância σ^2, que é baseada nos $N-k$ graus de liberdade e é independente de Yi, em que N é o número total de observações.

Dessa forma, a razão w/s é chamada amplitude studentizada e é denotada por $q(k, N-k) = \frac{w}{s}$, em que q é um valor tabelado.

Para tamanhos de amostras iguais (dados balanceados), o teste de Tukey declara duas médias significativamente diferentes se o valor absoluto de suas diferenças amostrais ultrapassar

$$TSD = q_\alpha(K, N-K)\sqrt{\frac{QME}{n}}$$

em que n é o número de réplicas do nível. Em outras palavras, rejeitamos a igualdade da média de dois níveis se $|\bar{y_{i.}} - \bar{y_{j.}}| > TSD.$

Um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para a diferença entre todos os pares das médias é dado como

$$\bar{y_{i.}} - \bar{y_{j.}} - q_\alpha(k, N-k)\sqrt{\frac{QME}{n}}$$

$$\leq \mu_i - \mu_j$$

$$\leq \bar{y_{i.}} - \bar{y_{j.}} + q_\alpha(k, N-k)\sqrt{\frac{QME}{n}}, \quad i \neq j.$$

Quando o tamanho das amostras são diferentes (dados não balanceados), o teste de Tukey é modificado e é chamado por vários escritores de Teste de Tukey-kramer. Esse teste não é exato, mas é minimamente conservativo no sentido em que a FWER real é muitas vezes menor que α. O teste de Tukey-kramer declara duas médias significativamente diferentes se o valor absoluto de suas diferenças amostrais ultrapassar

$$TSD = \frac{q_\alpha(k, N-k)}{\sqrt{2}}\sqrt{QME\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

e o intervalo de confiança, para $i \neq j$ é

$$\bar{y_{i.}} - \bar{y_{j.}} - \frac{q_\alpha(k, N-k)}{\sqrt{2}}\sqrt{QME\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

$$\leq \mu_i - \mu_j$$

$$\leq \bar{y_{i.}} - \bar{y_{j.}} + \frac{q_\alpha(k, N-k)}{\sqrt{2}}\sqrt{QME\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

O teste de Tukey-Kramer também tem sido confirmado analiticamente que, para dados não balanceados, fornece intervalos uniformemente mais curtos que qualquer um do outros MCM de uma etapa para a família de todas as comparações duas a duas.

4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Para os dados do Exemplo 1, vamos calcular o valor de TSD e verificar quais níveis são iguais.

Fator	Resistência_da_Fibra
15	7
15	7
15	15
15	11
15	9
20	12
20	17
20	12
20	18
20	18
25	14
25	18

Figura 1.2: Tabela Exemplo

25	18
25	19
25	19
30	19
30	25
30	22
30	19
30	23
35	7
35	10
35	11
35	15
35	11

Figura 1.3: Tabela Exemplo

Como os dados são balanceados, temos que:

$$TSD = q_\alpha(k, N-k)\sqrt{\frac{QME}{n}}$$

$$TSD = q_{0,05}(5, 20)\sqrt{\frac{8,06}{5}}$$

$$TSD = 4,232\sqrt{1,612}$$

$$TSD = 5,373$$

Rejeitamos a igualdade entre dois níveis se:

$$|\ \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}\ | > 5,373$$

$\lvert\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}\rvert$	Resultado	$\lvert\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}\rvert$	Resultado
$\lvert\bar{y}_{15} - \bar{y}_{20}\rvert$	$5,6$	$\lvert\bar{y}_{20} - \bar{y}_{30}\rvert$	$6,2$
$\lvert\bar{y}_{15} - \bar{y}_{25}\rvert$	$7,8$	$\lvert\bar{y}_{20} - \bar{y}_{35}\rvert$	$4,6$
$\lvert\bar{y}_{15} - \bar{y}_{30}\rvert$	$11,8$	$\lvert\bar{y}_{25} - \bar{y}_{30}\rvert$	$4,0$
$\lvert\bar{y}_{15} - \bar{y}_{35}\rvert$	$1,0$	$\lvert\bar{y}_{25} - \bar{y}_{35}\rvert$	$6,8$
$\lvert\bar{y}_{20} - \bar{y}_{25}\rvert$	$2,2$	$\lvert\bar{y}_{30} - \bar{y}_{35}\rvert$	$10,8$

figura 1.4

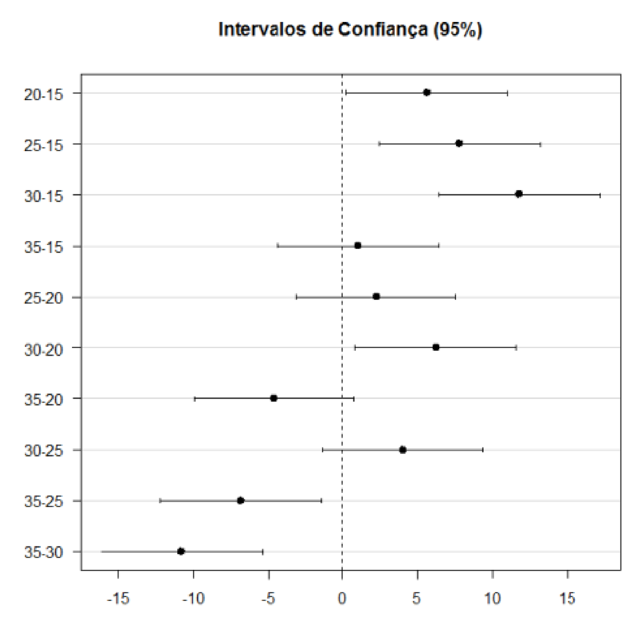

Figura 1.5: Diferença entre as medias dos níveis do fator

Conclusão do Exemplo Ao considerarmos um nível de significância de 5%, não rejeitamos a hipótese de igualdade entre as médias dos níveis: (15,35); (20,25); (20,35); (25,30).

5. Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o suporte de meus amigos e orientador:

João Vitor Gollner Oliveira (joao.gollner@ufv.br);

José Vitor Novaes Moreira (jose.novaes@ufv.br);

Fernando de Sousa Bastos (fernando.bastos@ufv.br).

6. Referências Bibliográficas

1. GOMES, Frederico Pimentel. A comparação entre médias de tratamentos na análise da variância. Anais da Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, v. 11, p. 1-12, 1954.
2. OLIVEIRA, Andréia FróesGaluci. Testes estatísticos para comparação de médias. Revista Eletrônica Nutritime, v. 5, n. 6, p. 777-788, 2008.
3. VIEIRA, Sonia. Análise de variância: ANOVA. Editora Atlas SA, 2000.
4. DE SOUSA, Clayton Albuquerque; JUNIOR, Mario Andrade Lira; FERREIRA, Rinaldo Luiz Caraciolo. Avaliação de testes estatísticos de comparações múltiplas de médias. Revista Ceres, v. 59, n. 3, p. 350-354, 2012.