Stirlingův vzorec

Stirlingův vzorec $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ je asymptotická aproximace faktoriálu. Většina dobře známých důkazů se spoléhá na použití určitých integrálů. Níže předvedeme důkaz, který používá pouze limity a derivace. Kromě Stirlingova vzorce odvodíme i asymptotickou aproximaci binomického koeficientu $\binom{2n}{n}$.

Definice 1. *Definujeme* $(2n)!! := 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$ *a* $(2n-1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

Pozorování. Zřejmě $(2n)!!(2n-1)!! = (2n)!$ a $(2n)!! = 2^n\, n!$.

Tvrzení 1 (Wallisův produkt)**.** *Platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz. Vyjdeme z Taylorovy řady pro $\sin(x)$ a přepíšeme ji.

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots .$$

Tento polynom je roven nule právě když $\sin(x)/x = 0$, tedy když $x = k\pi$ pro nějaké $0 \neq k \in \mathbb{Z}$. Jeho kořeny tedy jsou $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \ldots$ a jeho absolutní člen je 1. Proto jej můžeme přepsat na

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Dosazením hodnoty $\pi/2$ do tohoto vztahu získáme Wallisův produkt

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{4n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}\frac{2n+1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdots .$$

❑

Poznámka. Porovnáním koeficientům u x^2 bychom obdrželi $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$.

Tvrzení 2. $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Důkaz. Ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{4^n n! n!} = \frac{(2n)!!(2n-1)!!}{(2^n n!)^2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Musíme tedy ukázat, že $P(n) := \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim 1/\sqrt{\pi n}$. Z Wallisova produktu máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)P^2(n)} = \frac{\pi}{2}.$$

Takže

$$P^2(n) \sim \frac{2}{\pi(2n+1)} \implies P(n) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(2n+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

což dokazuje toto tvrzení.

❑

Tvrzení 3. *Posloupnost* $a_n := \dfrac{n!}{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}$ *má kladnou vlastní limitu.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že (a_n) je klesající, a pak, že je zdola omezena nějakým kladným číslem. Všimněme si, že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}\,(n+1)^{n+1}\, e^{-n-1}}{(n+1)n!} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n e} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

Dále definujeme $b_n := \ln(a_n)$. Potom

$$b_n - b_{n+1} = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1.$$

Zavedeme novou proměnnou k, takovou, aby $\frac{n+1}{n} = \frac{1+k}{1-k}$. To nám pomůže, protože budeme moci použít rozvoj na Taylorovu řadu. Tuto podmínku splňuje $k := \frac{1}{2n+1}$. Takže

$$b_n - b_{n+1} = \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) - 1.$$

Rozvojem na Taylorovu řadu získáme

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) &= \ln(1+k) - \ln(1-k) = \\
&= \left(k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} - \frac{k^4}{4} + \cdots\right) - \left(-k - \frac{k^2}{2} - \frac{k^3}{3} - \frac{k^4}{4} - \cdots\right) = \\
&= 2\left(k + \frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5}\cdots\right) = 2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{k^{2i+1}}{2i+1}.
\end{aligned}$$

Nyní máme

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) - 1 = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{k^{2i}}{2i+1} - 1 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{k^{2i}}{2i+1} > 0.$$

Z čehož plyne, že posloupnost (b_n) je klesající; logaritmus je monotonní funkce, takže i (a_n) je klesající. Budeme pokračovat v úpravách a ukážeme, že je i omezená. Využijeme faktu, že $0 < k < 1$:

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{k^{2i}}{2i+1} < \sum_{i=1}^{\infty}k^{2i} = k^2\sum_{i=1}^{\infty}k^{2i-2} = k^2\sum_{i=0}^{\infty}k^{2i} = \\
&= \frac{k^2}{1-k^2} = \frac{1}{(2n+1)^2\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)} = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \\
&= \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4(n+1)}.
\end{aligned}$$

Takže

$$b_n - \frac{1}{4n} < b_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)}$$

a posloupnost $\left(b_n - \frac{1}{4n}\right)$ je rostoucí. Tedy

$$b_n > b_n - \frac{1}{4n} > b_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow a_n > e^{0.75}.$$

Což dokazuje, že posloupnost (a_n) má kladnou vlastní limitu.

❑

Nyní už víme, že $n!$ roste (až na konstantní násobek) jako $\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$. Pro nalezení této konstanty budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4^n\, n!^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} = \sqrt{\pi}.$

Důkaz. Vyjdeme z Wallisova produktu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Rozšířením zlomku a úpravou dvojitých faktoriálů máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!^2(2n)!!^2}{(2n)!!^2(2n-1)!!^2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}\, n!^4}{(2n)!^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Odmocněním dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n\, n!^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\, n!^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\, n!^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

❑

Věta 5. $\displaystyle A \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}} = \sqrt{2\pi}.$

Důkaz. Vyjdeme z limity odvozené v předchozím lemmatu:

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\, n!^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \left(\dfrac{n!}{\sqrt{n}\, n^n e^{-n}}\right)^2 \left(\sqrt{n}\, n^n e^{-n}\right)^2}{\sqrt{n}\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}\sqrt{2n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\, A^2\, n\, n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{n}\, A\, \sqrt{2n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{A}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Takže $A = \sqrt{2\pi}$.

❑

Důsledek. Získáváme Stirlingův vzorec $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Zdroje

O tomto důkazu jsem se dozvěděl od Mgr. Dominika Becka, který mi ukázal trik s Wallisovým produktem. Wallisův produkt se často dokazuje pomocí určitých integrálů, my jsme jej dokázali pomocí Taylorova rozvoje, ovšem existuje ještě elementárnější důkaz. Johan Wästlund totiž dokázal Wallisův produkt pouze za použití základní algebry, viz [2]. Důkaz existence limity pochází z [1].

[1] Charles H.C. Little, Kee L. Teo a Bruce. van Brunt. *Real Analysis via Sequences and Series*. eng. 1st ed. 2015. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2015. ISBN: 1-4939-2651-9. URL: `https://link-springer-com.ezproxy.is.cuni.cz/book/10.1007/978-1-4939-2651-0`.

[2] Johan Wastlund. „An Elementary Proof of the Wallis Product Formula for pi“. eng. In: *The American mathematical monthly* 114.10 (2007), s. 914–917. ISSN: 0002-9890. URL: `https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00029890.2007.11920484`.

Jakub Smolík

5. října 2023