Gymnázium Kladno, náměstí Edvarda Beneše 1573

Riemannova zeta-funkce

Seminární práce z matematiky

Jakub Smolík

Třída O8

Rok zpracování: 2021/2022

Obsah

Úvod

Tato seminární práce se věnuje základním poznatkům z oblasti studia prvočíselné funkce, gama funkce, Dirichletovy eta-funkce, Riemannovy zeta-funkce a Riemannovy hypotézy. Vybral jsem si toto téma, protože blízce souvisí se základními stavebními bloky matematiky – prvočísly.

Vlastnosti prvočísel byly studovány mnohými matematickými giganty. Od Euklidova důkazu nekonečnosti prvočísel, až po Eulerův součin, který spojuje prvočísla s Riemannovou zeta-funkcí. Od Gaussovy a Adrien-Marie Legendrovy formulace prvočíselné věty až po její důkaz o téměř sto let později Jacquesem Hadamardem a Charlesem Jeanem de la Vallée Poussinem. Německý matematik Bernard Riemann však stále vládne jako matematik, který učinil největší průlom v teorii prvočísel. Jeho práce, celá obsažená v osmistránkovém článku publikovaném v roce 1859, přinesla nové a dříve neznáme objevy o distribuci prvočísel a je dodnes považována za jednu z nejdůležitějších prací v teorii čísel. Od svého zveřejnění byl Riemannův článek hlavním zaměřením teorie prvočísel a byl hlavním důvodem, proč se povedlo v roce 1896 dokázat prvočíselnou větu. Od té doby bylo nalezeno několik nových důkazů, ale Riemannova hypotéza o kořenech Riemannovy zeta-funkce však stále zůstává záhadou.

Tato práce je rozdělena do pěti kapitol.

V první kapitole jsou představeny základy Landauovy notace, která je během práce místy využívána.

Ve druhé kapitole se seznámíme s prvočíselnou funkcí a s prvočíselnou větou.

Ve třetí kapitole si definujeme gama funkci, dokážeme si některé její vlastnosti a odvodíme si Stirlingův vzorec pro aproximaci faktoriálu.

Ve čtvrté kapitole si definujeme Dirichletovu eta-funkci, kterou později použijeme k rozšíření definičního oboru Riemannovy zeta-funkce.

V páté kapitole se zaměříme na samotnou Riemannovu zeta-funkci. Dokážeme si některé její vlastnosti a budeme zkoumat její hodnoty. Nakonec si představíme Riemannovu hypotézu a spojitost kořenů Riemannovy zeta-funkce s distribucí prvočísel.

1 Landauova notace

V této kapitole jsem vycházel ze článku zveřejněném na *Wikipedii*.[1]

Landauova notace se používá pro porovnání asymptotického chování funkcí. Nejběžněji se používá takzvaná *notace velkého O* z anglického *big O notation*. V informatice se tato notace používá pro porovnání časové nebo prostorové složitosti algoritmů.

Definice 1. Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce definované na nějaké neomezené podmnožině kladných reálných čísel a nechť funkce $g(x)$ je kladná pro všechna dostatečně velká x, potom píšeme, že

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$$

právě tehdy, když

$$\exists(k > 0), x_0\ ;\ \forall(x > x_0) : |f(x)| \leq k \cdot g(x).$$

Pomocí notace velkého $\mathcal{O}$ většinou značíme asymptotické chování funkcí v nekonečnu. V nekonečnu příspěvek nejrychleji rostoucích členů nakonec učiní ostatní příspěvky zanedbatelné. V důsledku toho lze použít následní zjednodušující pravidla:

- Je-li $f(x)$ součtem několika členů, existuje-li jeden s nejvyšší rychlostí růstu, lze jej ponechat a všechny ostatní vynechat.
- Je-li $f(x)$ součinem několika činitelů, lze jakékoli konstanty vynechat.

V nekonečnu například platí, že x^3 roste rychleji než x^2 nebo že libovolná exponenciála roste rychleji než libovolný polynom.

Věta 1. *Nechť* $n \in \mathbb{R}^+,\ a \in \mathbb{R},\ a > 1$, *pak platí:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x!} = \lim_{x\to\infty} \frac{x!}{x^x} = 0.$$

Důkaz: Uvedené vztahy lze dokázat opětovným uplatňováním l'Hôpitalova pravidla.

Ukážeme si pár příkladů zápisu použitím notace velké O:

---

[1] Big O notation. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation

$$4x^4 - 7x^3 + 17 = \mathcal{O}(x^4),$$

$$e^x + x^{100} = \mathcal{O}(e^x),$$

$$e^x\sqrt{x} - 174x^2 + e^x = \mathcal{O}\left(e^x\sqrt{x}\right).$$

Mezi Landauovy notace se řadí ještě několik dalších notací, ze kterých si my nadefinujeme pouze *asymptotickou rovnost*.

Definice 2. Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce definované na nějaké neomezené podmnožině kladných reálných čísel, potom říkáme, že $f(x)$ je *asymptoticky rovna* $g(x)$ a píšeme

$$f(x) \sim g(x)$$

právě tehdy, když

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

2 Prvočíselná funkce

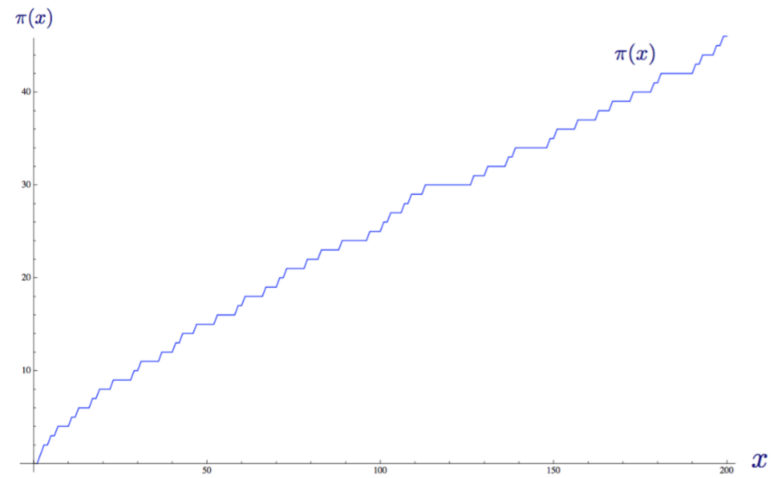
V této kapitole jsem vycházel především ze článku zveřejněném na *Wikipedii*[2] a ze článku zveřejněném na webu *Cantorsparadise*.[3]

Prvočíselná funkce je matematická funkce, která je rovna počtu všech prvočísel menších nebo rovných nějakému reálnému číslu x. Značí se řeckým písmenem π.

Definice 3. Nechť $x \in \mathbb{R}$, pak *prvočíselná funkce*

$$\pi(x) \coloneqq \sum_{\substack{p \in P \\ p \leq x}} 1,$$

kde P je množina všech prvočísel.



Obrázek 2.1: Graf prvočíselné funkce $\pi(x)$ *až po* $x = 200$.[4]

Na konci 18. století se Gauss domníval, že prvočíselná funkce je asymptoticky rovna výrazu $x/\ln x$. Tato domněnka byla dokázána až v roce 1896 a nazývá se *prvočíselná věta*.

Věta 2. *Prvočíselná věta je tvrzení, že*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

[2] Prime-counting function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Prime-counting_function

[3] VEISDAL, Jørgen. *Cantorsparadise* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.cantorsparadise.com/the-riemann-hypothesis-explained-fa01c1f75d3f

[4] VEISDAL, Jørgen. *Cantorsparadise* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.cantorsparadise.com/the-riemann-hypothesis-explained-fa01c1f75d3f

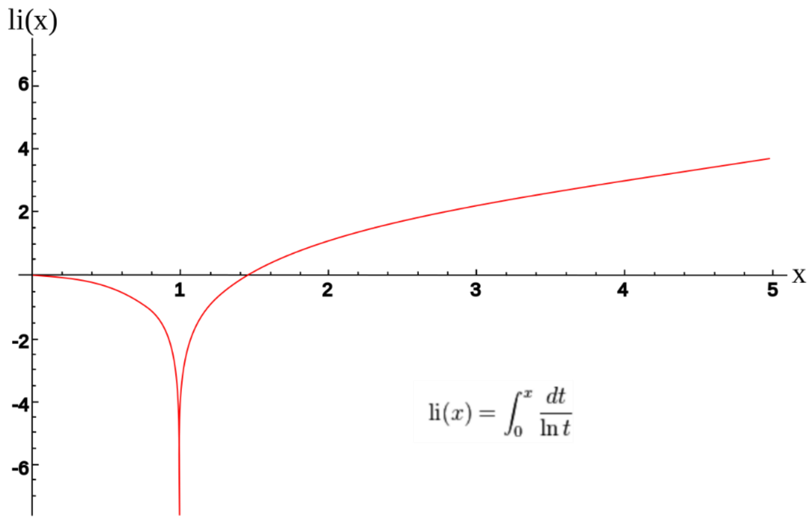
Lepší aproximací pro prvočíselnou funkci je ale takzvaná *logaritmická integrální funkce,*[5] což je neelementární funkce, značená $\mathrm{li}(x)$.

Definice 4. Nechť $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, pak *logaritmická integrální funkce*

$$\mathrm{li}(x) \coloneqq \int_0^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Funkce $1/\ln t$ má v bodě $t = 1$ singularitu, takže pro $x > 1$ tento integrál spočítáme jako

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t} \right).$$



Obrázek 2.2: Graf logaritmické integrální funkce.[6]

Abychom se vyhnuli této singularitě, tak se často používá *posunutá logaritmická integrální funkce*, který se značí $\mathrm{Li}(x)$. Pokud mluvíme o logaritmické integrální funkcí a píšeme $\mathrm{Li}(x)$, pak máme na mysli její posunutou verzi.

Definice 5. Nechť $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ pak *posunutá logaritmická integrální funkce*

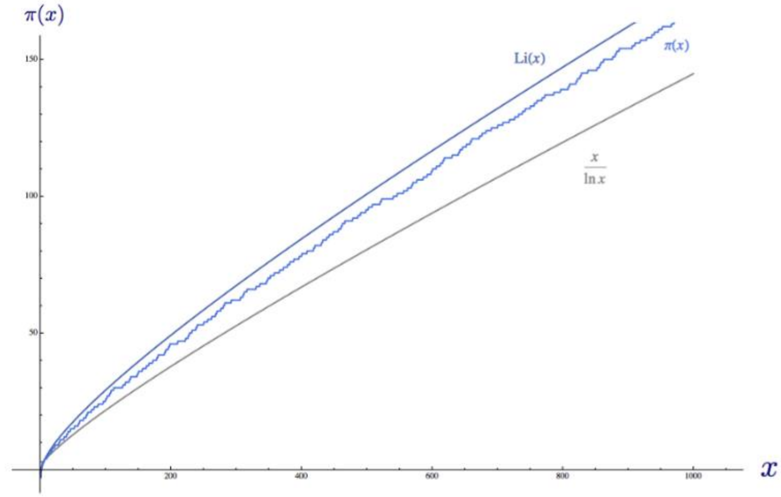
$$\mathrm{Li}(x) \coloneqq \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(2),$$

přičemž $\mathrm{li}(2) \approx 1.045$.

[5] srov. Logarithmic integral function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_integral_function
[6] Logarithmic integral function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_integral_function

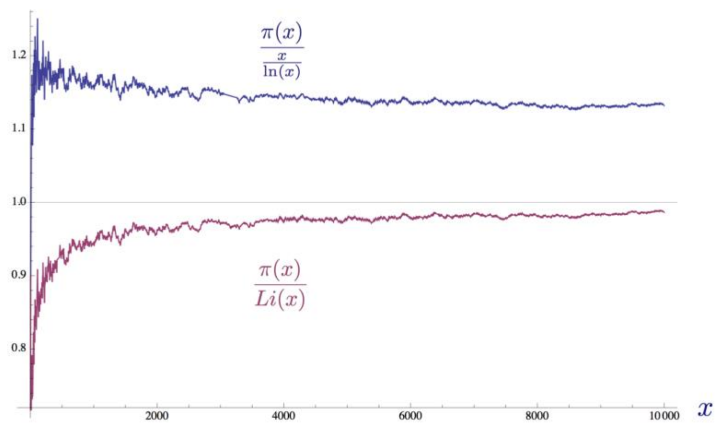
Ekvivalentní výrok k prvočíselné větě tedy je

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x).$$



Obrázek 2.3: Graf logaritmické integrální funkce $Li(x)$, prvočíselné funkce $\pi(x)$ a $x/ln\,x$.[7]

Také je vidět, že $\mathrm{Li}(x)$ asymptoticky konverguje k $\pi(x)$ mnohem rychleni než $x/\ln x$.



Obrázek 2.4: Graf poměrů prvočíselné funkce $\pi(x)$ s $Li(x)$ a s $x/ln\,x$.[8]

Odchylka logaritmické integrální funkce a prvočíselné funkce je maximálně

$$|\mathrm{Li}(x) - \pi(x)| = \mathcal{O}(x \ln x).$$

Také si můžeme všimnout že pro malá x je $\mathrm{Li}(x) > \pi(x)$, ale jejich grafy se protnou nekonečně mnohokrát. Víme, že poprvé se to stane někde mezi $x = 10^{19}$ a $x = 1.4 \cdot 10^{316}$.

[7] Logarithmic integral function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_integral_function
[8] Logarithmic integral function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_integral_function

3 Gama funkce

V této kapitole jsem vycházel především ze článku zveřejněném na *Wikipedii*.[9]

Gama funkce je velmi užitečná neelementární funkce, která se používá jako zobecnění faktoriálu pro komplexní čísla. Gama funkce je definovaná pro všechna komplexní čísla kromě nekladných celých čísel, ve kterých má póly.

3.1 Hlavní definice

Definice 6. Nechť $z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0$, pak *gama funkce*

$$\Gamma(z) \coloneqq \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Pro $\Re(z) \leq 0$ tento integrál diverguje a gama funkci musíme pro tato čísla definovat nějak jinak. Ukážeme si, že platí vztah $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ a použijeme jej k rozšíření definičního oboru.

Věta 3. *Nechť* $z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0$, *pak*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Důkaz:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & t^z & \searrow & e^{-t} \\ - & zt^{z-1} & \rightarrow & -e^{-t} \end{vmatrix} = -t^z e^{-t}\big|_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t}\, dt = z\Gamma(z).$$

Věta 4. *Nechť* $n \in \mathbb{N}$, *pak*

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Důkaz: Dokážeme, že $\Gamma(n+1)$ má stejné vlastnosti jako $n!$. Z *Věty 3* víme, že $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Stačí nám tedy ukázat, že $\Gamma(2) = 1! = 1$.

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty t e^{-t}\, dt = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & t & \searrow & e^{-t} \\ - & 1 & \searrow & -e^{-t} \\ + & 0 & \rightarrow & e^{-t} \end{vmatrix} = (-te^{-t} - e^{-t})\big|_0^\infty = -\lim_{x\to\infty} \frac{t+1}{e^t} - (0-1) = 1$$

---

[9] Gamma function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

Ukázali jsme, že $\Gamma(n+1)$ má stejné vlastnosti jako $n!$, čímž je tvrzení dokázané.

Gama funkci tedy můžeme vnímat jako zobecnění faktoriálu. Pomocí gama funkce můžeme dodefinovat 0! jako

$$0! = \Gamma(1) = \Gamma(2)/1 = 1.$$

Rovnici $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ nyní můžeme použít k rozšíření definičního oboru gama funkce.

Definice 7. Nechť $z \in \mathbb{C},\ \Re(z) \leq 0,\ z \notin \mathbb{Z}_0^-$, pak *gama funkce*

$$\Gamma(z) \coloneqq \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Tímto způsobem můžeme gama funkci dodefinovat pro všechna komplexní čísla, kromě nekladných celých čísel, protože bychom dělili nulou:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \Rightarrow \Gamma(0) = \frac{\Gamma(1)}{0} = \frac{1}{0}.$$

Ukážeme si to na příkladu. Nejdříve si spočítáme $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \left| \begin{matrix} t = u^2 \\ dt = 2u\, du \end{matrix} \right| = \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} 2u\, du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du.$$

Přičemž $\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du$ je velmi známý Gaussův integrál, který je roven odmocnině z Ludolfova čísla. Tedy platí:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}.$$

Pomocí vztahu $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ pak můžeme najít další hodnoty gama funkce:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^1 \frac{2}{1}\sqrt{\pi} = -2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^2 \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{2}{5}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = (-1)^3 \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{\pi} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)=(-1)^n\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\sqrt{\pi}=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Když naopak budeme používat vztah $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, tak dostaneme:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

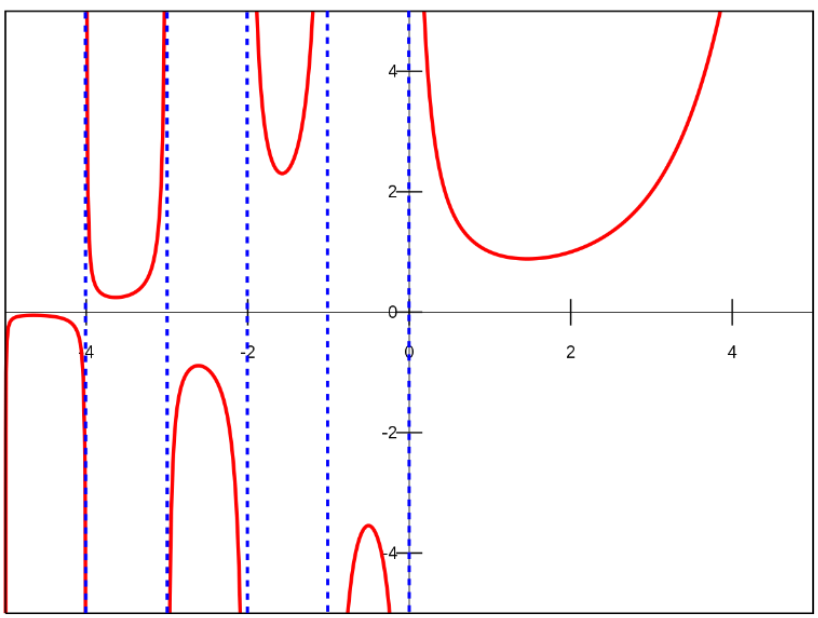
$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\Gamma\left(\frac{1+2n}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Věta 5. *Nechť $n\in\mathbb{N}$, pak*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi},$$

kde $n!!$ je dvojitý faktoriál.



Obrázek 3.1: Graf gama funkce v oboru reálných čísel.[10]

[10] Gamma function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

3.2 Důkaz podmínky konvergence a divergence

V úvodu do této kapitoly jsme konstatovali, že integrál

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

konverguje pro $\Re(z) > 0$ a diverguje pro $\Re(z) \leq 0$. V tomto oddíle se pokusíme toto tvrzení dokázat. Jako první si ale dokážeme dvě lemmata, která nám s tím pomohou.

Lemma 1. *Nechť* $z = a + bi \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{R}^+$, *pak* $n^{\overline{z}} = \overline{n^z}$.

Důkaz:

$$\begin{aligned} n^{\overline{z}} = n^{a-bi} = n^a n^{-bi} = n^a e^{-bi\ln n} &= n^a[\cos(-b\ln n) + i\sin(-b\ln n)] \\ &= n^a[\cos(b\ln n) - i\sin(b\ln n)] = \overline{n^a[\cos(b\ln n) + i\sin(b\ln n)]} = \overline{n^a e^{ib\ln n}} \\ &= \overline{n^a n^{ib}} = \overline{n^{a+bi}} = \overline{n^z}. \end{aligned}$$

Lemma 2. *Nechť* $z = a + bi \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{R}^+$, *pak* $|n^z| = n^{\Re(z)}$.

Důkaz: Vyjdeme ze vztahu $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$. Dále použijeme tvrzení z *Lemmatu 1*.

$$|n^z| = \sqrt{n^z \cdot \overline{n^z}} = \sqrt{n^z \cdot n^{\overline{z}}} = \sqrt{n^{a+bi} \cdot n^{a-bi}} = \sqrt{n^{2a}} = n^a = n^{\Re(z)}.$$

Věta 6. *Nechť* $z \in \mathbb{C},\ \Re(z) = \sigma > 0$, *pak*

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

konverguje.

Důkaz:[11] Ukážeme, že tento integrál konverguje absolutně. Budeme tedy dokazovat konvergenci integrálu:

$$\int_0^\infty |t^{z-1}|e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^{\Re(z)-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt.$$

[11] srov. Prove the improper integral of the Gamma function converges. *StackExchange* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/628110/prove-the-improper-integral-of-the-gamma-function-gammat-converges-for-z

Integrál si nejdříve rozdělíme na dva:

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt.$$

Všimněme si, že pro $t \in [0,1]$ platí: $t^{\sigma-1}e^{-t} \le t^{\sigma-1}$. Důkaz:

$$e^{-t} \le 1 \Rightarrow t^{\sigma-1}e^{-t} \le t^{\sigma-1}.$$

Dále si všimněme, že pro dostatečně velká $t \ge 1$ platí: $t^{\sigma-1}e^{-t} \le e^{-\frac{t}{2}}$. Důkaz:

$$t^{\sigma-1}e^{-t} \le e^{-\frac{t}{2}} \Leftrightarrow t^{\sigma-1} \le e^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \frac{t^{\sigma-1}}{e^{\frac{t}{2}}} \le 1,$$

což platí pro dostatečně velká t, protože z l'Hôpitalova pravidla plyne

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\sigma-1}}{e^{\frac{t}{2}}} = 0.$$

Z těchto dvou nerovností vyplývá nerovnost:

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt \le \int_0^1 t^{\sigma-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}\,dt$$
$$= \frac{t^\sigma}{\sigma}\bigg|_0^1 - 2\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)\bigg|_1^\infty = \frac{1}{\sigma} - 2\left(0 - e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sigma} + \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Čímž je tvrzení dokázané.

Věta 7. *Nechť* $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z) = \sigma \le 0$, *pak*

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

diverguje.

Důkaz:[12] Tuto větu dokážeme pouze pro $\Im(z) = 0 \Rightarrow z = \Re(z) = \sigma$. Její pravdivost pro $\Im(z) \neq 0$ nebudeme v této práci ověřovat. Integrál si nejdříve rozdělíme na dva:

---

[12] srov. Convergence and divergence of gamma. *StackExchange* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/118207/convergence-of-gammap-for-0p-leq-1-and-divergence-for-p-leq0

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt.$$

Všimněme si, že pro $t \in [\varepsilon, 1]$ platí $e^{-t} \geq e^{-1}$. Dále si všimněme, že pro $t \in [\varepsilon, 1]$ a pro $\sigma \leq 0$ platí $t^{\sigma-1} \geq t^{-1}$. Důkaz:

$$t^{\sigma-1} \geq t^{-1} \Leftrightarrow t^\sigma \geq 1.$$

Můžeme tedy zapsat nerovnost:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt \geq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 t^{-1}e^{-1}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{e}\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{e}[\ln|t|]_\varepsilon^1$$
$$= \frac{1}{e}\left(\ln 1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\varepsilon\right) = \infty.$$

Dále můžeme provést observaci, že $\int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt > 0$, protože pro $t \geq 1$ je $t^{\sigma-1}e^{-t} > 0$.

Můžeme tedy konstatovat, že:

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt \geq \int_0^1 t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt = \infty.$$

Čímž je tvrzení dokázané pro $z \in \mathbb{R}$.

3.3 Eulerova definice

Pokud budeme chtít určit hodnotu gama funkce komplexního čísla s nenulovou imaginární složkou, tak budeme muset použít Eulerovu definici pomocí nekonečného součinu.

Věta 8. *Nechť* $z \in \mathbb{C},\ z \notin \mathbb{Z}_0^-$, *pak*

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^\infty \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}.$$

Důkaz:[13] Tento vzorec odvodíme pro $z \in \mathbb{N}$. Jeho pravdivost pro $z \in \mathbb{C},\ z \notin \mathbb{Z}_0^-$ nebudeme v této práci ověřovat. Vyjdeme z této limity:

[13] srov. Gamma function: Euler's definition as an infinite product. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function#Euler's_definition_as_an_infinite_product

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)^z}{(n+z)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)\cdots(n+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z+\cdots}{n^z+\cdots} = 1, \qquad n,z \in \mathbb{N}.$$

Nyní obě strany rovnice vynásobíme výrazem $z!$ a provedeme nějaké úpravy.

$$z! = \lim_{n\to\infty} n!\frac{z!}{(n+z)!}(n+1)^z$$

$$z! = \lim_{n\to\infty} n!\frac{1}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}(n+1)^z$$

$$z! = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^z$$

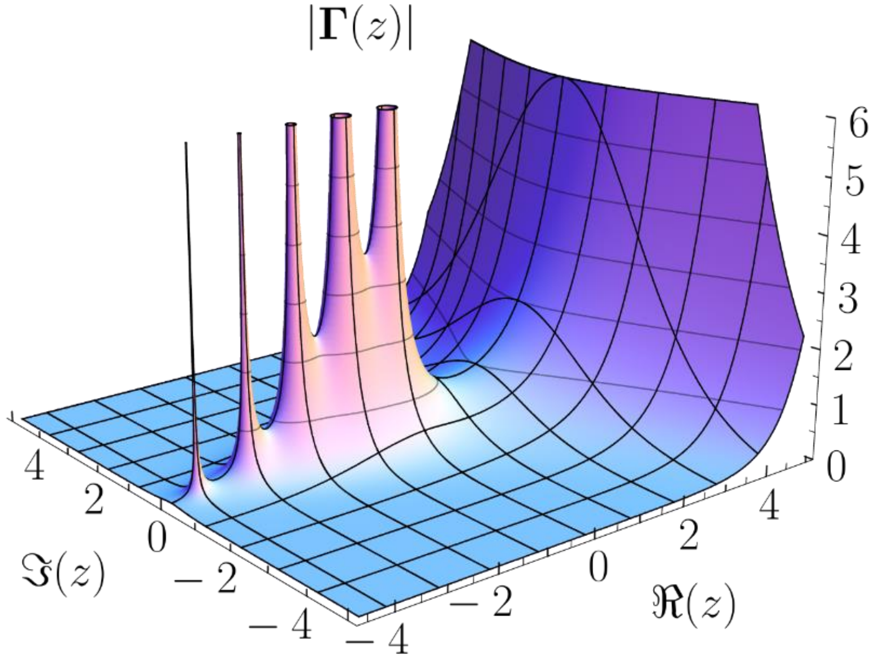
$$z! = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^z = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{z}{n}+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}$$

Nyní si pomocí tohoto vztahu vyjádříme gama funkci $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = (z-1)! = \frac{z!}{z} = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}.$$

Čímž je tvrzení dokázané pro $z \in \mathbb{N}$.

Pokud tedy budeme chtít aproximovat hodnotu gama funkce nějakého komplexního čísla, tak spolu vynásobíme dostatečný počet členů Eulerova nekonečného součinu. Dělat tento výpočet ručně by pro dostatečný počet členů trvalo příliš dlouho, takže na tyto aproximace zpravidla používáme počítače.



Obrázek 3.2: Trojrozměrný graf modulu gama funkce.[14]

3.4 Eulerův odrazový vzorec

Tento vzorec se v angličtině nazývá *Euler's reflection formula* a jeho český název jsem nenašel, takže jsem jej volně přeložil jako *Eulerův odrazový vzorec*. Než si tento vzorec odvodíme, tak si dokážeme jedno lemma, které nám s tímto důkazem pomůže.

Lemma 3. *Nechť* $x \in \mathbb{C}$, *pak*

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Důkaz:[15] Vyjdeme z Maclaurinova polynomu pro $\sin x$ a vydělíme jej x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots.$$

[14] Gamma function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

[15] srov. Basel problem. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

Nyní se tento polynom pokusíme rozložit na součin lineárních činitelů. Budeme muset najít jeho kořeny, musíme tedy vyřešit rovnici

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{x}=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=\{k\pi | k\in\mathbb{Z}\setminus 0\}$$

Absolutní člen tohoto polynomu je jedna. Pokud označíme kořeny tohoto polynomu α_1, α_2, α_3, ..., pak můžeme tento polynom rozložit takto:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_3}\right)\cdots.$$

Víme, že kořeny tohoto polynomu jsou $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$, po dosazení tedy dostaneme:

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Tento polynom je roven $\sin x/x$, což znamená, že funkci sinus můžeme zapsat jako

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

čímž je tvrzení dokázané pro $x\neq 0$, ale je vidět, že pokud do této rovnice dosadíme nulu, tak nám vyjde $\sin 0=0$, což je v pořádku.

Věta 9. *Nechť* $z\in\mathbb{C},\ z\notin\mathbb{Z}$, *pak*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Důkaz:[16] Jako první si výraz upravíme použitím $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ a poté použijeme Eulerovu definici gama funkce.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{1+\frac{z}{n}} \cdot (-z) \cdot \frac{1}{(-z)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}}{1-\frac{z}{n}}$$

$$= \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{1+\frac{z}{n}} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}}{1-\frac{z}{n}} = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2}}$$

Tento součin zjednodušíme použitím výsledku z *Lemmatu 3*.

$$\sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(\pi z)^2}{\pi^2 n^2}\right) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{\pi z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2}}$$

A náš součin tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

čímž je tvrzení dokázané.

3.5 Gama funkce čísla komplexně sdruženého

Věta 10. *Nechť* $z \in \mathbb{C},\ z \notin \mathbb{Z}_0^-$*, pak*

$$\Gamma(\overline{z}) = \overline{\Gamma(z)}.$$

Což implikuje, že

$$\Gamma(z)\Gamma(\overline{z}) = |\Gamma(z)|^2 \in \mathbb{R}.$$

Důkaz: Vyjdeme ze základních vlastností komplexně sdružených čísel, které zde nebudeme dokazovat. Také použijeme tvrzní z *Lemmatu 1*. Pro všechna $z, w \in \mathbb{C},\ w \neq 0$ platí:

$$\overline{z} \pm \overline{w} = \overline{z \pm w}, \qquad \overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{zw}, \qquad \frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}, \qquad n^{\overline{z}} = \overline{n^z}.$$

[16] srov. FEHLAU, Jens. Euler's Reflection Formula - Two very ELEGANT Proofs!. *YouTube* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=C1TMEo12DIQ&t=459s

Z Eulerovy definice gama funkce nyní máme:

$$\Gamma(\overline{z}) = \frac{1}{\overline{z}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\overline{z}}}{1+\frac{\overline{z}}{n}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}}{\overline{\left(1+\frac{z}{n}\right)}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\overline{\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)}\right]} = \overline{\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{1+\frac{z}{n}}} = \overline{\Gamma(z)}.$$

Čímž je tvrzení dokázané.

3.5.1 Aproximace faktoriálu imaginární jednotky

V tomto pododdílu jsem vycházel z videa zveřejněném na platformě *YouTube*.[17]

Nyní využijeme tyto znalosti a pokusíme se aproximovat faktoriál imaginární jednotky a zjistit modul tohoto čísla. Jako první zkusíme najít modul. Budeme tedy hledat $|i!| = |\Gamma(1+i)|$. Vyjdeme ze vztahu $\Gamma(z)\Gamma(\overline{z}) = |\Gamma(z)|^2$.

$$|i!| = |\Gamma(i+1)| = \sqrt{\Gamma(1+i)\Gamma(1-i)} = \sqrt{\mathrm{i}\Gamma(i)\Gamma(1-i)} = \sqrt{\mathrm{i}\frac{\pi}{\sin(\pi i)}}$$

Použili jsme rekurzivní vlastnost gama funkce i Eulerův odrazový vzorec. Abychom tento výraz zjednodušili, tak použijeme komplexní definici sinu, která vyplývá z Eulerova vzorce:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\,, \qquad e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta),$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = -i\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

Dostaneme tedy:

$$|i!| = \sqrt{\frac{i\pi}{\sin(\pi i)}} = \sqrt{\frac{i\pi}{-i\frac{e^{i^2\pi} - e^{-i^2\pi}}{2}}} = \sqrt{\frac{-\pi}{\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{\sinh\pi}}.$$

Můžeme tedy prohlásit, že $|i!| = \sqrt{\pi\,\mathrm{csch}\,\pi} \approx 0.522$.

[17] FEHLAU, Jens. I! and the Complex Gamma Function. *YouTube* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=vsdMYADQRkM&t=1553s

Nyní se pokusíme aproximovat $\Gamma(i+1)$ pomocí Eulerovy definice gama funkce. Pro jednoduchost použijeme pouze první člen tohoto součinu.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}} \Rightarrow \Gamma(1+i) \approx \frac{1}{1+i}\cdot\frac{(1+1)^{1+i}}{1+(1+i)} = \frac{2\cdot 2^i}{(1+i)(2+i)} = \frac{2\cdot e^{i\ln 2}}{2+3i-1}$$

$$= \frac{2\cdot e^{i\ln 2}}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1\ -3i} = \frac{2(1-3i)}{1+9}e^{i\ln 2} = \frac{1-3i}{5}(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2))$$

$$= \frac{1}{5}\cos(\ln 2) + i\frac{1}{5}\sin(\ln 2) - i\frac{3}{5}\cos(\ln 2) + \frac{3}{5}\sin(\ln 2)$$

$$= \frac{1}{5}[3\sin(\ln 2) + \cos(\ln 2)] + i\frac{1}{5}[\sin(\ln 2) - 3\cos(\ln 2)] \approx 0.21 - 0.6i$$

Kdybychom použili více členů tohoto součinu, tak bychom se blížili k hodnotě

$$\Gamma(1+i) \approx 0.498 - 0.155i.$$

3.6 Polygama funkce

Polygama funkce n-tého řádu[18] je definovaná jako $(n+1)$-ní derivace přirozeného logaritmu gama funkce. Používá se například pro vyjádření derivace gama funkce.

Definice 8. Nechť $z \in \mathbb{C},\ z \notin \mathbb{Z}_0^-$, pak *polygama funkce n-tého řádu*

$$\psi_n(z) \coloneqq \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\ln\Gamma(z) = \frac{d^n}{dz^n}\psi_0(z).$$

Tedy

$$\psi_0(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

3.7 Derivace gama funkce

Derivace gama funkce můžeme snadno zapisovat pomocí různých řádů polygama funkce:

$$\frac{d}{dz}\Gamma(z) = \Gamma(z)\psi_0(z),$$

[18] srov. Polygamma function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Polygamma_function

$$\frac{d^2}{dz^2}\Gamma(z) = \frac{d}{dz}[\Gamma(z)\psi_0(z)] = \Gamma'(z)\psi_0(z) + \Gamma(z)\psi_0{}'(z) = \Gamma(z)\psi_0^2(z) + \Gamma(z)\psi_1(z).$$

Gama funkci také můžeme derivovat použitím Leibnizova integrálního pravidla:

$$\frac{d}{dz}\Gamma(z) = \frac{d}{dz}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z}(t^{z-1}e^{-t})\,dt = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ln t\,dt,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\Gamma(z) = \frac{d}{dz}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ln t\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z}(t^{z-1}e^{-t}\ln t)\,dt = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,(\ln t)^2 dt,$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,(\ln t)^n dt.$$

Tímto způsobem můžeme také najít derivaci faktoriálu (pokud definiční obor rozšíříme na všechna nezáporná reálná čísla):

$$\frac{d}{dx}x! = \frac{d}{dx}\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\ln t\,dt.$$

3.8 Stirlingův vzorec

Gama funkci a faktoriál můžeme poměrně přesně aproximovat pomocí Stirlingova vzorce.

Věta 11. *Nechť* $n \in \mathbb{R}^+$*, pak*

$$n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Tento vzorec má velmi malou odchylku, už pro $n = 10$ je menší než jedno procento.

Důkaz:[19] Vyjdeme z definice gama funkce:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{n\ln t}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty \exp(-t + n\ln t)\,dt.$$

Nyní se argument v exponenciále pokusíme aproximovat pomocí Taylorova polynomu. Nejdřív bude vhodné zjistit, kde nabývá svého maxima a aproximaci pak provedeme vůči tomuto bodu. Definujeme si funkci $f(t) = -t + n\ln t$ a najdeme její maximum.

[19] srov. Stirlingův vzorec. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Stirling%C5%AFv_vzorec

$$f'(t) = -1 + \frac{n}{t} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = n$$

$$f''(t) = -\frac{n}{t^2} \Rightarrow f''(n) = -\frac{n}{n^2} < 0$$

Maximum je tedy v bodě $t = n$. Použijeme první tři členy Taylorova polynomu:

$$f(n) + \frac{f'(n)(t-n)^1}{1!} + \frac{f''(n)(t-n)^2}{2!} = -n + n\ln n + 0 - \frac{1}{2n}(t-n)^2.$$

$$\Rightarrow f(t) \sim -n + n\ln n - \frac{1}{2n}(t-n)^2, \qquad \text{pro } t \to n.$$

Dostáváme tedy:

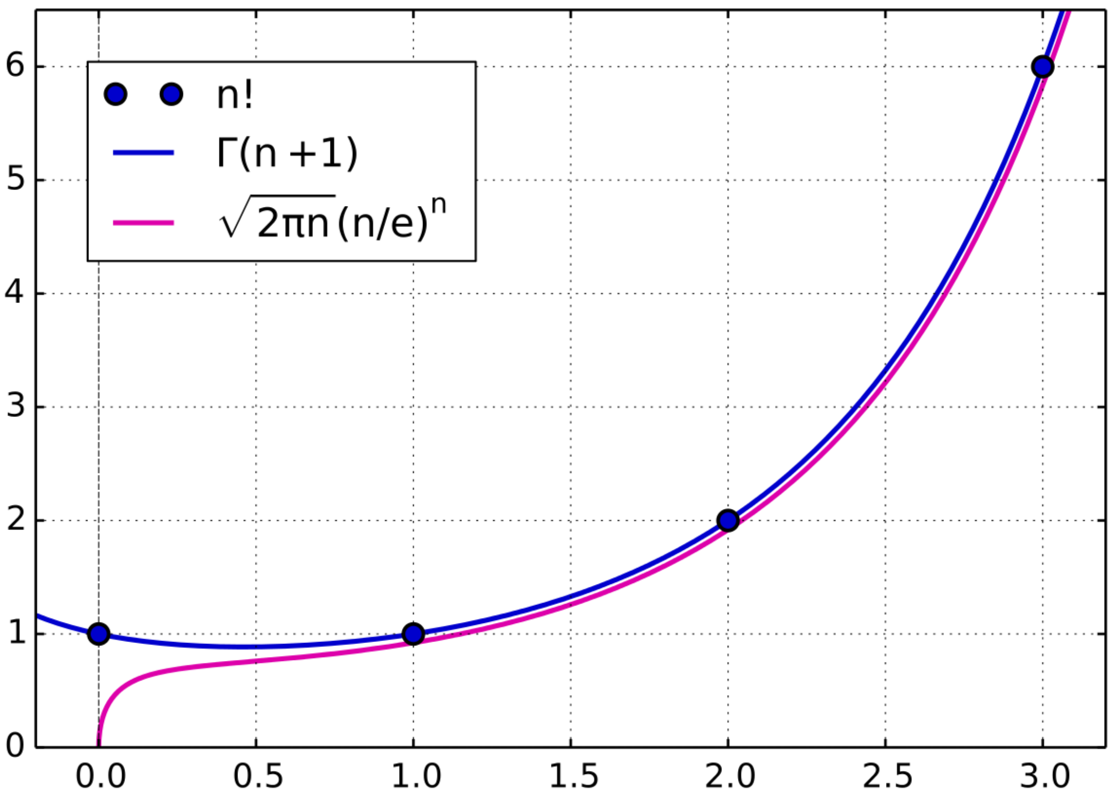
$$n! \sim \int_0^\infty \exp\left(-n + n\ln n - \frac{1}{2n}(t-n)^2\right) dt = e^{-n}n^n \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2n}(t-n)^2\right) dt$$

$$= \left| \begin{array}{c} u^2 = \frac{1}{2n}(t-n)^2 \\ u = \frac{1}{\sqrt{2n}}(t-n) \\ du = \frac{1}{\sqrt{2n}} dt \\ t = 0 \to u = -\frac{n}{\sqrt{2n}} \end{array} \right| = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^\infty e^{-u^2}\sqrt{2n}\, du = \sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^\infty e^{-u^2}\, du.$$

Všimněme si, že výraz e^{-u^2} nabývá vysokých hodnot pouze v blízkosti počátku a pro $u \to \infty$ velmi rychle konverguje k nule. Proto můžeme předpokládat, že rozšířením integračního oboru na celá reálná čísla se nedopustíme velké chyby. Tím nám vznikne již zmiňovaný Gaussův integrál, který je roven odmocnině z Ludolfova čísla. Dostáváme tedy:

$$n! \sim \sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Toto odvození není zcela rigorózní, nikde jsme totiž neodhalili chybu výpočtu.



Obrázek 3.3: Porovnání aproximace dané Stirlingovým vzorcem (červená) s gama funkcí (modrá). Také jsou vyznačeny hodnoty faktoriálu (modré body).[20]

[20] srov. Stirling's approximation. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling%27s_approximation

4 Dirichletova eta-funkce

V této kapitole jsem vycházel převážně ze článku zveřejněném na *Wikipedii*.[21]

Dirichletova eta-funkce je celá komplexní funkce, tedy funkce definovaná na celé Gaussově rovině, kterou budeme potřebovat k rozšíření definičního oboru Riemannovy zeta-funkce.

4.1 Definice

Definice 9. Nechť $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 0$, pak *Dirichletova eta-funkce*

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots.$$

Pro $\Re(s) \leq 0$ tato suma zjevně diverguje a Dirichletovu eta-funkci musíme pro tato čísla definovat nějak jinak. V nule dostaneme takzvanou *Grandiho řadu*:

$$\eta(0) = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Tato řada diverguje, ale mnohé metody jí přiřazují hodnotu $1/2$. V kontextu Dirichletovy eta-funkce se používá takzvaná *Abelova sumace*.[22]

Definice 10. Mějme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Vytvoříme k ní novou mocninou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pokud řada definující $f(x)$ konverguje pro všechna $|x| < 1$ a pokud $f(x)$ má vlastní limitu L pro $x \to 1^-$, pak tuto limitu nazýváme *Abelovou sumou* řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a značíme jí

$$A\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

[21] Dirichlet eta function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_eta_function

[22] srov. Abel summability. *PlaneMath* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://planetmath.org/abelsummability

Je důležité podotknou, že pokud daná řada konverguje k nějaké hodnotě, pak Abelova suma této řady je právě tato hodnota.

Dirichletovu eta-funkci můžeme v nule tedy vyhodnotit takto:

$$\eta(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

Pro $|x| < 1$ můžeme tuto řadu sečíst pomocí vzorce pro součet geometrické řady:

$$\eta(0) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-(-x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

Definice 11. Nechť $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) \leq 0$, pak *Dirichletova eta-funkce*

$$\eta(s) \coloneqq A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^s}.$$

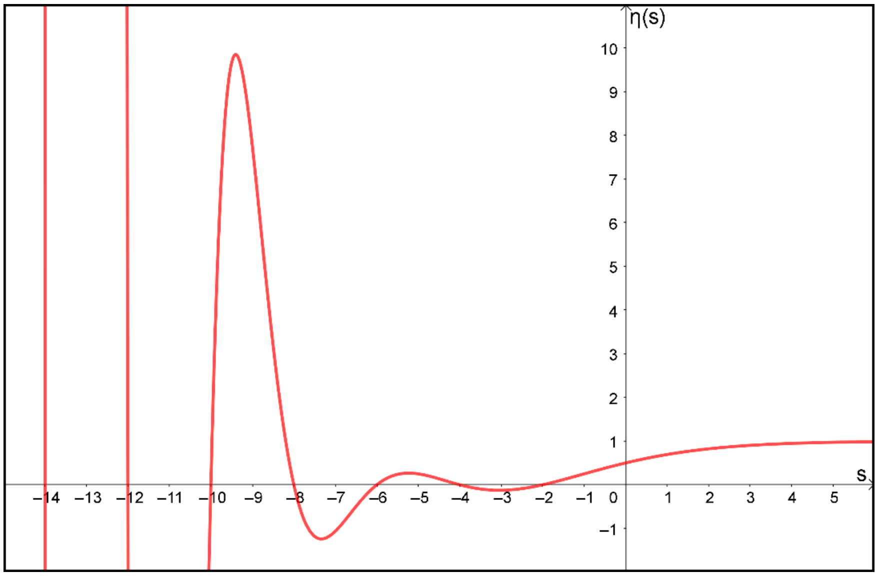
Hodnoty Dirichletovy eta-funkce také můžeme určovat pomocí funkcionální rovnice. Tato rovnice vznikne analytickým prodloužením Dirichletovy eta-funkce na celou komplexní rovinu. V této práci ji nebudeme odvozovat.

Věta 12. *Nechť $s \in \mathbb{C}$, ale $s \notin \mathbb{N}_0$, pak*

$$\eta(s) = -2 \frac{1-2^{s-1}}{1-2^s} \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \eta(1-s).$$

Pokud bychom do této rovnice dosadili $s = 0$, tak bychom dělili nulou ($1 - 2^0 = 0$). Podobně, pokud bychom dosadili $s \in \mathbb{N}$, tak by nebyla definovaná gama funkce.

Můžeme si všimnout, že pro $s = -2n,\ n \in \mathbb{N}$ je $\eta(s) = 0$. Můžeme tedy konstatovat, že Dirichletova eta-funkce má nulové body ve všech sudých záporných celých číslech.



Obrázek 4.1: Graf Dirichletovy eta-funkce v oboru reálných čísel.

4.1.1 Definice pomocí určitého integrálu

Dirichletova eta-funkci se pro $\Re(s) > 0$ také někdy definuje pomocí určitého integrálu jako

$$\eta(s) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx.$$

Věta 13. *Nechť $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 0$, pak*

$$\eta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx.$$

Důkaz:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \frac{1}{1 - (-e^{-x})} dx =$$

Nyní využijeme skutečnosti, že pro $x > 0$ je $|-e^{-x}| < 1$ a použijeme rozvoj na geometrickou řadu.

$$= \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (-e^{-x})^k \, dx = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-xk} \, dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} e^{-xk} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x(k+1)} \, dx$$

$$= \begin{vmatrix} t = x(k+1) \\ dt = (k+1)dx \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{k+1}\right)^{s-1} e^{-t} \frac{1}{k+1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^s} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} \Gamma(s) = \eta(s)\Gamma(s)$$

Což implikuje tvrzení této věty.

4.2 Důkaz podmínky konvergence

V tomto důkazu budeme muset použít *Dirichletovo kritérium konvergence.*[23] Zavedeme si jej jako lemma, ale nebudeme jej dokazovat.

Lemma 4. *Nechť* $\{a_n\}$ *je reálná posloupnost a* $\{b_n\}$ *je komplexní posloupnost pro které platí:*

- $\{a_n\}$ *je od jistého indexu monotónní a* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- $\{b_n\}$ *má omezenou posloupnost částečných součtů, tedy pro každé* $N \in \mathbb{N}$ *je*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leq M,$$

kde M je nějaká konstanta. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

konverguje.

Věta 14. *Nechť* $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) = \sigma > 0$, *pak řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

konverguje.

[23] srov. Dirichlet's test. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet%27s_test

Důkaz:[24] Nejprve ukážeme, že pro $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) = \sigma > 1$ tato řada konverguje absolutně. Budeme tedy dokazovat konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\Re(s)}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}.$$

Využijeme integrální kritérium konvergence. Stačí nám tedy ukázat, že integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^\sigma}dx$ konverguje. Při řešení využijeme faktu, že $1 - \sigma < 0$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\sigma}dx = \int_1^\infty x^{-\sigma}\,dx = \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\bigg|_1^\infty = 0 - \frac{1}{1-\sigma} = \frac{1}{\sigma - 1}$$

Tento integrál konverguje, čímž je tvrzení dokázané pro $\Re(s) > 1$.

Pro $\Re(s) \in (0, 1]$ tuto větu dokážeme pouze pro $\Im(\mathrm{s}) = 0 \Rightarrow s = \Re(s) = \sigma$. Její pravdivost pro $\Im(\mathrm{s}) \neq 0$ nebudeme v této práci ověřovat. Ukážeme tedy, že konverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\sigma}.$$

Ověříme si, zda splňuje Dirichletovo kritérium konvergence. Rozložíme jí na dvě řady:

$$\{a_n\} = \frac{1}{n^\sigma}, \qquad \{b_n\} = (-1)^{n-1}.$$

Řada $\{a_n\}$ je klesající, protože $n \geq 1$ a $\sigma > 0$. Také je vidět, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Částečný součet řady $\{b_n\}$ je vždy buď nula nebo jednička. Posloupnost těchto částečných součtů je tedy omezená jedničkou. Naše řada tedy splňuje Dirichletovo kritérium konvergence, z čehož vyplývá, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\sigma}$$

konverguje, čímž je tvrzení dokázané pro $\Re(s) \in (0, 1],\ \Im(\mathrm{s}) = 0$.

[24] srov. Proving convergence of the Dirichlet Eta function. *StackExchange* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/2188438/proving-convergence-of-the-dirichlet-eta-function

4.3 Konkrétní hodnoty

Pro získání některých hodnot je užitečné použít vztah $\eta(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s})$, kde $\zeta(s)$ je Riemannova zeta-funkce. Tento vztah si odvodíme v kapitole o Riemannově zeta-funkci.

4.3.1 Hodnota η(0)

V nule dostaneme Grandiho řadu a jak jsme již ukázali $\eta(0) = 1/2$.

4.3.2 Hodnota η(1)

V jedničce dostaneme alternující harmonickou řadu, tedy

$$\eta(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2.$$

Důkaz: Vyřešíme $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+1} dx$ dvěma různými způsoby a porovnáme výsledky.

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + 1} dx = \left| \begin{matrix} u = e^x + 1 \\ du = e^x dx = (u-1)dx \end{matrix} \right| = \int_2^\infty \frac{1}{u(u-1)} du = \int_2^\infty \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1} \right) du$$

$$= [\ln|u-1| - \ln|u|]_2^\infty = \left[\ln \left| \frac{u-1}{u} \right| \right]_2^\infty = \left[\ln \left| 1 - \frac{1}{u} \right| \right]_2^\infty = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

Použijeme definici $\eta(s)$ pomocí určitého integrálu $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1} dx = \eta(s)\Gamma(s)$. Tedy:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{1-1}}{e^x + 1} dx = \eta(1)\Gamma(1) = \eta(1).$$

Z čehož vyplývá vztah $\eta(1) = \ln 2$.

4.3.3 Hodnota η(2)

Tuto hodnotu získáme ze vztahu mezi Dirichletovou eta-funkcí a Riemannovou zeta-funkcí:

$$\eta(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s}) \Rightarrow \eta(2) = \zeta(2)(1 - 2^{1-2}) = \frac{\pi^2}{6}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

Kde jsme použili $\zeta(2) = \pi^2/6$. Tuto hodnotu si dokážeme v kapitole o Riemannově zeta-funkci.

4.3.4 Hodnota η(-1)

Tuto hodnotu získáme z funkcionální rovnice Dirichletovy eta-funkce:

$$\eta(s) = -2\frac{1-2^{s-1}}{1-2^{s}}\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\eta(1-s)$$

$$\eta(-1) = -2\frac{1-2^{-1-1}}{1-2^{-1}}\pi^{-1-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Gamma(1+1)\eta(1+1) = 2\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\pi^{2}}\cdot\frac{\pi^{2}}{12} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

5 Riemannova zeta-funkce

V této kapitole jsem vycházel převážně ze článku zveřejněném na *Wikipedii*.[25]

Riemannova zeta-funkce je velmi důležitá komplexní funkce, definovaná na celé Gaussově rovině kromě bodu $s = 1$ ve kterém má pól. Blízce souvisí s rozmístěním prvočísel, přesněji řečeno s aproximací prvočíselné funkce. O této skutečnosti se budeme blíže bavit v oddílu o *Riemannově hypotéze*.

5.1 Definice

Definice 12. Nechť $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1$, pak *Riemannova zeta-funkce*

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots.$$

V bodě $s = 1$ dostaneme harmonickou řadu, které diverguje do nekonečna, takže pro $s \in \mathbb{R}$, $s \leq 1$ tato suma diverguje. Je zjevné, že diverguje pro $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) \leq 0$, ale její divergenci pro $\Re(s) \in (0, 1]$ v této práci nebudeme dokazovat. Jestliže tato suma diverguje pro $\Re(s) \leq 1$, pak pro tato čísla musíme Riemannovu zeta-funkci definovat nějak jinak.

Věta 15. *Nechť* $s \in \mathbb{C},\ s \neq 1$, *pak*

$$\eta(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s}).$$

Důkaz: Využijeme sumy definující Dirichletovu eta-funkci a Riemannovu zeta-funkci. Suma definující $\eta(s)$ absolutně konverguje pro $\Re(s) > 1$, z čehož vyplývá, že pro tato čísla absolutně konverguje i suma definující $\zeta(s)$. To znamená, že pro $\Re(s) > 1$ můžeme změnit pořadí členů sumy definující $\eta(s)$, aniž bychom změnili její výslednou hodnotu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}$$

[25] Riemann zeta function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

$$= \zeta(s) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \zeta(s) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-s}}{n^s} = \zeta(s) - 2^{1-s}\zeta(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s})$$

Tato rovnost platí pro $\Re(s) > 1$, ale Dirichletova eta-funkce je definovaná pro všechna komplexní čísla, takže pokud definujme Riemannovu zeta-funkci, pomocí Dirichletovy eta-funkce, tak můžeme psát $\eta(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s})$ pro všechna $s \in \mathbb{C}$, kromě $s = 1$, protože výraz $1 - 2^{1-s}$ je pro $s = 1$ roven nule a dostali bychom $\zeta(1) = \eta(1)/0$. Riemannova zeta-funkce má tedy v bodě $s = 1$ pól.

Definice 13. Nechť $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) \leq 1$, ale $s \neq 1$ pak *Riemannova zeta-funkce*

$$\zeta(s) \coloneqq \eta(s)(1 - 2^{1-s})^{-1}.$$

Hodnoty Riemannovy zeta-funkce také můžeme určovat pomocí Riemannovy funkcionální rovnice, který vznikne analytickým prodloužením Riemannovy zeta-funkce.

Věta 16. *Nechť $s \in \mathbb{C}$, ale $s \notin \mathbb{N}_0$, pak*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Důkaz: Vyjdeme z funkcionální rovnice pro Dirichletovu eta-funkci:

$$\eta(s) = -2\frac{1 - 2^{s-1}}{1 - 2^s} \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\eta(1-s).$$

Nyní využijeme vztah $\eta(s) = \zeta(s)(1 - 2^{1-s})$:

$$\zeta(s)(1 - 2^{1-s}) = -2\frac{1 - 2^{s-1}}{1 - 2^s} \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)(1 - 2^s)$$

$$\zeta(s) = -2\frac{1 - 2^{s-1}}{1 - 2^{1-s}} \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

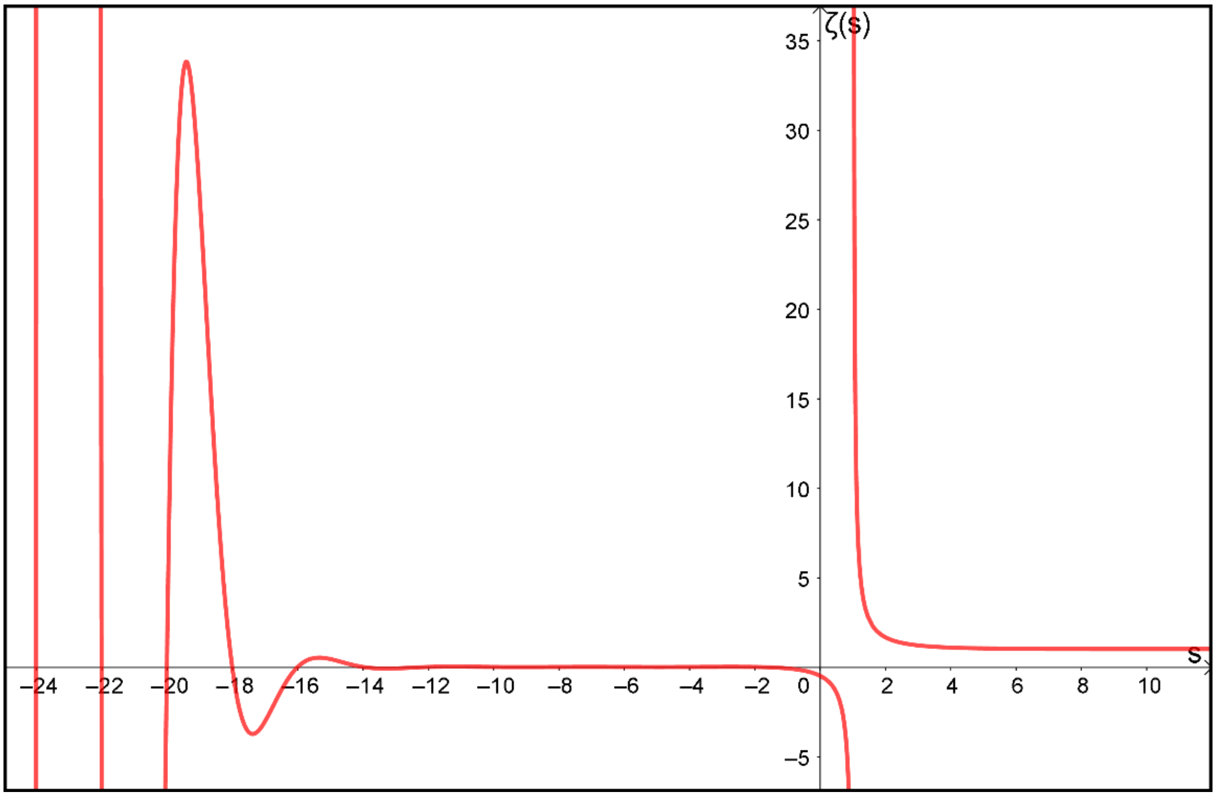
$$\zeta(s) = -2\frac{2^{s-1}(2^{1-s} - 1)}{1 - 2^{1-s}} \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Čímž je tvrzení dokázané.

Pokud bychom do této rovnice dosadili $s = 0$, tak na pravé straně budeme mít nedefinovanou hodnotu $\zeta(1)$. Podobně, pokud bychom dosadili $s \in \mathbb{N}$, tak by nebyla definovaná gama funkce.

Můžeme si všimnout, že pro $s = -2n,\ n \in \mathbb{N}$ je $\zeta(s) = 0$. Můžeme tedy konstatovat, že Riemannova zeta-funkce má nulové body ve všech sudých záporných celých číslech. Tyto nulové body nazýváme *triviální* a budeme se o nich blíže bavit v oddílu o Riemannově hypotéze.



Obrázek 5.1: Graf Riemannovy zeta-funkce v oboru reálných čísel.

5.1.1 Definice pomocí určitého integrálu

Podobně jako Dirichletova eta-funkce se i Riemannova zeta-funkce pro $\Re(s) > 1$ někdy definuje pomocí určitého integrálu jako

$$\zeta(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

Věta 17. *Nechť $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1$, pak*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx.$$

Důkaz:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} dx =$$

Nyní využijeme skutečnosti, že pro $x > 0$ je $|e^{-x}| < 1$ a můžeme tedy použít rozvoj na geometrickou řadu.

$$= \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x} \sum_{k=0}^\infty (e^{-x})^k \, dx = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x} \sum_{k=0}^\infty e^{-xk} \, dx$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x(k+1)} \, dx = \begin{vmatrix} t = x(k+1) \\ dt = (k+1)dx \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{k+1}\right)^{s-1} e^{-t} \frac{1}{k+1} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)^s} \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t} \, dt$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s} \Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s)$$

Což implikuje tvrzení této věty.

5.2 Důkaz podmínky konvergence

Věta 18. *Nechť* $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) = \sigma > 1$, *pak řada*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

konverguje.

Důkaz: Ukážeme, že tato řada konverguje absolutně. Budeme tedy dokazovat konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\Re(s)}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma}.$$

Konvergenci této řady jsme ale už dokázali v kapitole o Dirichletově eta-funkci, můžeme tedy říci, že tvrzení platí.

5.3 Eulerův součin

Eulerův součin nám ukazuje spojitost Riemannovy zeta-funkce s prvočísly.

Věta 19. *Nechť* $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$, *pak*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \in P} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}},$$

kde P je množina všech prvočísel.

Důkaz:[26] Využijeme faktu, že suma definující $\zeta(s)$ je pro $\Re(s) > 1$ absolutně konvergentní, takže můžeme manipulovat s jejími členy, aniž bychom změnili její výslednou hodnotu.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots.$$

Po vynásobení obou stran rovnice číslem $1/2^s$ dostaneme:

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \cdots.$$

Tento výraz odečteme od původní sumy, čímž se zbavíme všech násobků dvojky:

$$\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots.$$

Nyní obě strany vynásobíme číslem $1/3^s$, což nám dá:

$$\frac{1}{3^s}\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} + \cdots.$$

Tento výraz odečteme od předchozího, čímž se zbavíme všech násobků trojky:

$$\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \cdots.$$

Nyní zopakujeme stejný postup s číslem $1/5^s$:

[26] srov. Riemannova funkce zeta. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemannova_funkce_zeta

$$\frac{1}{5^s}\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)=\frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{35^s}+\frac{1}{55^s}+\frac{1}{65^s}+\frac{1}{85^s}+\cdots.$$

Po odečtení nám zmizí všechny násobky pětky:

$$\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)=\frac{1}{1^s}++\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\cdots.$$

Je vidět, že kdybychom tento proces opakovali donekonečna s každým prvočíslem, tak bychom dostali:

$$\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\left(1-\frac{1}{11^s}\right)\cdots=\frac{1}{1^s}.$$

A tedy:

$$\zeta(s)\prod_{p\in P}(1-p^{-s})=1\Rightarrow\zeta(s)=\prod_{p\in P}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Vztah

$$\frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ns}}$$

dostaneme rozepsáním zlomku $1/(1-p^{-s})$ na geometrickou řadu.

5.4 Hodnota nekonečného součtu zeta-funkcí

Věta 20. *Platí rovnost:*

$$\sum_{s=2}^{\infty}(\zeta(s)-1)=1.$$

Důkaz:[27] Vyjdeme z definice Riemannovy zeta-funkce:

$$\sum_{s=2}^{\infty}(\zeta(s)-1)=\sum_{s=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-1\right)=\sum_{s=2}^{\infty}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}-1\right)=\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

[27] srov. CHOW, Steve. An infinite series of an infinite series. *YouTube* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=lV0oFZhghcg&t=609s

Nyní využijeme faktu, že pokud naše dvojitá suma konverguje, tak konverguje absolutně, protože

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Což znamená, že můžeme zaměnit pořadí sumace, aniž bychom ovlivnili výsledek. Zaměníme tedy pořadí sumace a využijeme vzorec pro součet geometrické řady:

$$\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^s - 1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1} - 1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1} - 1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Dostali jsme teleskopickou řadu, kterou můžeme vyřešit následovně:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-1}\right) - \frac{1}{N}\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[1 - \frac{1}{N}\right] = 1.$$

Čímž je tvrzení dokázané.

5.5 Konkrétní hodnoty

V tomto oddílu jsem vycházel ze článku zveřejněném na *Wikipedii.*[28]

5.5.1 Hodnota ζ(0)

Pro výpočet této hodnoty použijeme vztah mezi Riemannovou zeta-funkcí a Dirichletovou eta-funkcí. Přiřazujeme tedy hodnotu řadě $\zeta(0) = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$.

[28] Particular values of the Riemann zeta function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Particular_values_of_the_Riemann_zeta_function

$$\zeta(s) = \eta(s)(1-2^{1-s})^{-1} \Rightarrow \zeta(0) = \eta(0)(1-2)^{-1} = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Tímto netvrdíme, že řada $1+1+1+\cdots$ konverguje k hodnotě $-1/2$. Pouze jí tuto hodnotu přiřazujeme.

5.5.2 Hodnota ζ(-1)

Budeme přiřazovat hodnotu řadě

$$\zeta(-1) = 1+2+3+4+5+\cdots.$$

Můžeme toho dosáhnout pomocí Riemannovy funkcionální rovnice:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

$$\Rightarrow \zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-1-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Gamma(1+1)\zeta(1+1) = -\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Stejného výsledku můžeme dosáhnou, pokud známe hodnotu $\eta(-1) = 1/4$:

$$\zeta(s) = \eta(s)(1-2^{1-s})^{-1}$$

$$\Rightarrow \zeta(-1) = \eta(-1)(1-2^{1+1})^{-1} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}.$$

5.5.3 Hodnota ζ(2)

Hodnota $\zeta(2) = \pi^2/6$ je velmi známá. Tato úloha se nazývá *Bazilejský problém* a vyřešil ji Euler. Ukážeme si jeho důkaz. Vyjdeme z výsledku z *Lemmatu 3*:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Roznásobíme součin a zaměříme se pouze na druhé mocniny x:

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \cdots - \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x^2}{(2\pi)^2} - \frac{x^2}{(3\pi)^2} - \cdots = \cdots - \frac{x^2}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) + \cdots.$$

A porovnáme koeficienty u druhých mocnin x:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.5.4 Hodnota v kladných sudých číslech

Euler dokázal, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\zeta(2n) = \frac{p}{q}\pi^{2n}, \qquad p \in \mathbb{Z}, \qquad q \in \mathbb{N}.$$

V dnešní době už je znám přesný vzorec pro tyto hodnoty, ve kterém se mimo jiné objevují i takzvaná *Bernoulli čísla*, která souvisí s bionomickými koeficienty. Konkrétně:

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}.$$

Několik prvních hodnot:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \qquad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

5.5.5 Hodnota v kladných lichých číslech

Pro kladná lichá čísla neexistuje žádný obecný vzorec jako pro kladná sudá čísla. V jedničce dostaneme harmonickou řadu

$$\zeta(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = \infty,$$

která diverguje a Riemannova zeta-funkce jedničky tedy není definovaná. Ve trojce dostaneme hodnotu $\zeta(3) \approx 1.202$, která se nazývá *Apéryho konstanta*. Apéry dokázal, že $\zeta(3)$ je iracionální. V dnešní době už je dokázáno, že nekonečně mnoho čísel ve formě $\zeta(2n+1),\ n \in \mathbb{N}$ je iracionálních.

5.5.6 Hodnota v záporných celých číslech

Obecně, pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

V sudých záporných celých číslech je Riemannova zeta-funkce rovna nule.

Prvních několik hodnot:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \qquad \zeta(-3) = \frac{1}{120}, \qquad \zeta(-5) = -\frac{1}{252}, \qquad \zeta(-7) = \frac{1}{240}.$$

5.5.7 Hodnota limity ζ(∞)

Věta 21. *Platí rovnost:*

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(\mathrm{s}) = 1.$$

Důkaz:[29]

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(\mathrm{s}) = \lim_{s\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{s\to\infty} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = 1 + \lim_{s\to\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Nyní potřebujeme určit hodnotu řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pro $s \to \infty$. Víme, že dolní hranice je nula. Horní hranici můžeme stanovit pomocí integrálu. Máme tedy:

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{x^{1-s}}{1-s}\bigg|_1^{\infty}.$$

Využijeme toho, že s je velké, a tudíž je $1 - s < 0$. Dostaneme tedy:

$$0 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq 0 - \frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1}.$$

Pro $s \to \infty$ dostaneme nerovnost:

$$0 \leq \lim_{s\to\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s-1} = 0.$$

Což implikuje, že

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(\mathrm{s}) = 1 + \lim_{s\to\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1.$$

[29] srov. CHOW, Steve. An infinite series of an infinite series. *YouTube* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=lV0oFZhghcg&t=609s

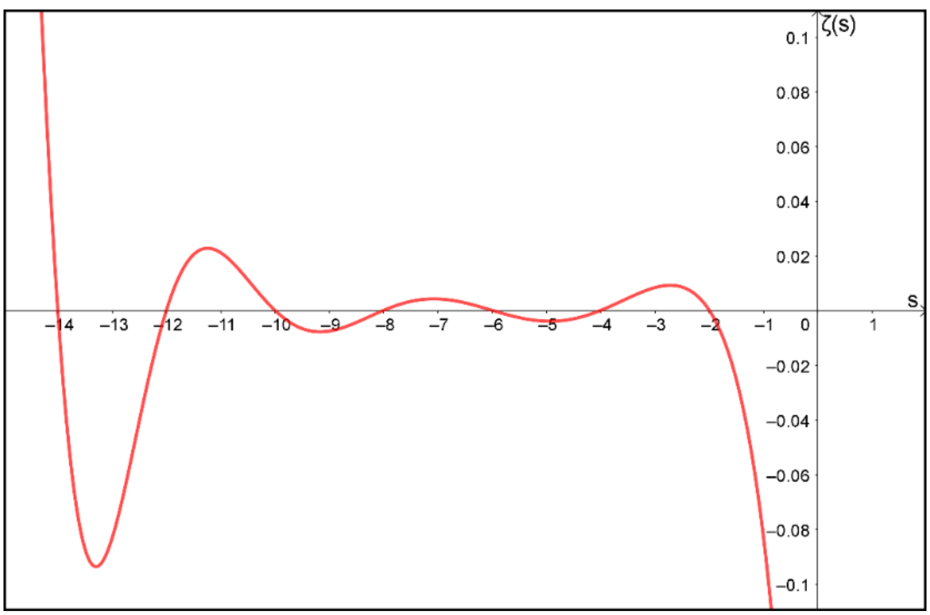
5.6 Riemannova hypotéza

V tomto oddílu jsem vycházel zejména ze článku zveřejněném na *Wikipedii*[30] a ze článku zveřejněném na webu *Cantorsparadise.*[31]

Riemannova hypotéza je jedním z nejdůležitějších nevyřešených problémů současné matematiky. Dokázáním Riemannovy hypotézy by bylo vyřešeno velké množství hlubokých problémů z různých oblastí matematiky, jejichž důkazy předpokládají pravdivost Riemannovy hypotézy. V roce 2000 byla zařazena mezi sedm nejdůležitějších nevyřešených matematických problémů nového tisíciletí. Za vyřešení některého z těchto problémů zaplatí Clayův matematický ústav odměnu 1 000 000 \$. Zatím byl vyřešen pouze jeden z problémů tisíciletí (Poincarého domněnka), ale matematik, který jej vyřešil (Grigorij Perelman) odměnu odmítl. Riemannova hypotéze se zabývá nulovými body Riemannovy zeta-funkce.

5.6.1 Existence nulových bodů s $\Re(s) < 0$

Již jsme konstatovali, že v sudých záporných celých číslech se vyskytují takzvané *triviální nulové body*. Těmto nulovým bodům říkáme triviální, protože je snadné je najít a vysvětlit.



Obrázek 5.2: Prvních několik triviálních nulových bodů Riemannovy zeta-funkce.

[30] Riemann hypothesis. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

[31] VEISDAL, Jørgen. *Cantorsparadise* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.cantorsparadise.com/the-riemann-hypothesis-explained-fa01c1f75d3f

5.6.2 Existence nulových bodů s $\Re(s) > 1$

Z Eulerova součinu je vidět, že Riemannova zeta-funkce nemůže mít nulový bod s reálnou složkou větší než jedna, protože konvergentní nekonečný součin může být roven nule pouze pokud je jeden z jeho členů roven nule.

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

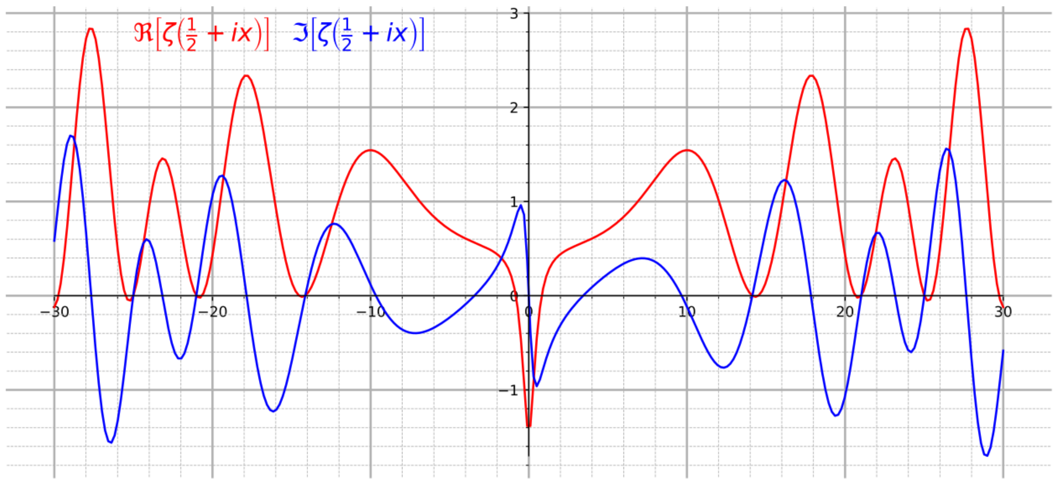
5.6.3 Existence nulových bodů s $0 \leq \Re(s) \leq 1$

Našli jsme triviální nulové body Riemannovy zeta-funkce v polorovině $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) < 0\}$ a ukázali jsme, že neexistují žádné nulové body v polorovině $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$.

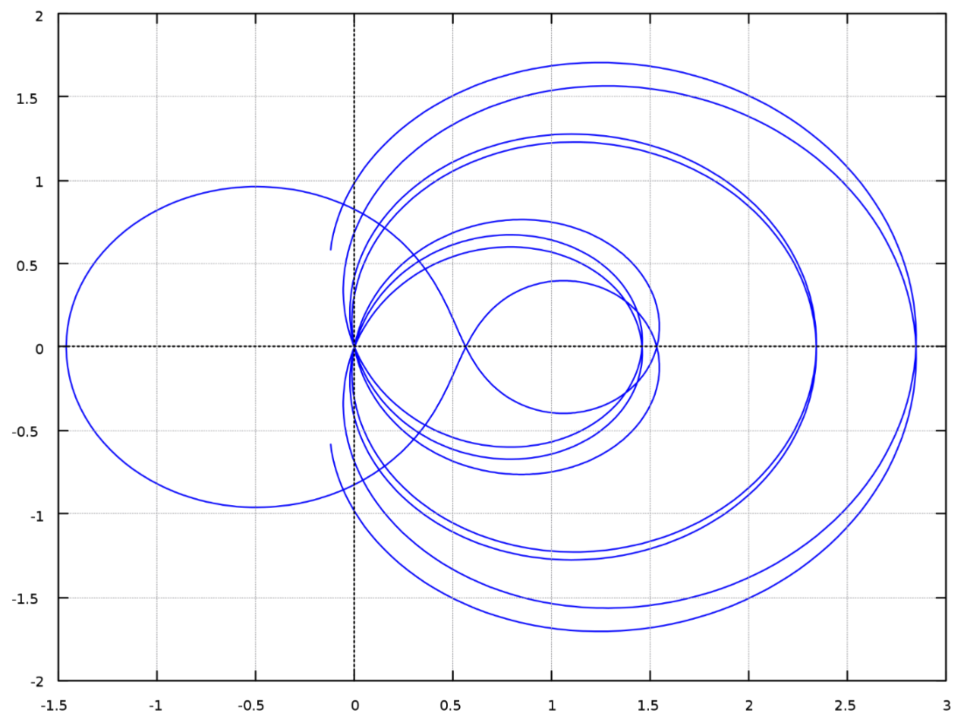
Pás mezi těmito dvěma polorovinami $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(s) \leq 1\}$ se nazývá *kritický pás* a přímka uprostřed tohoto pásu $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) = 1/2\}$ se nazývá *kritická přímka*. Nulové body, které se nachází v kritickém pásu nazýváme *netriviální nulové body*. Víme o nich, že jich je nekonečně mnoho a že jejich reálné časti jsou symetrické podle kritické přímky a že se objevují v komplexně sdružených dvojicích. Množina všech nulových bodů je tedy osově souměrná podle reálné osy i podle kritické přímky. V roce 1989 bylo dokázáno, že více než 40% všech netriviálních nulových bodů leží na kritické přímce. Riemannova hypotéze je však mnohem silnější tvrzení a to, že *všechny netriviální nulové body Riemannovy zeta-funkce leží na kritické přímce.*

Bylo již zkontrolováno $12\ 363\ 153\ 437\ 138$ netriviálních nulových bodů a všechny ležely na kritické přímce. Toto je poměrně silný důvod k předpokladu, že Riemannova hypotéza je pravdivá, ale není to její důkaz. V historii matematiky se objevuje několik hypotéz, které numericky vypadaly, že jsou pravdivé, ale nakonec bylo dokázáno, že pravdivé nejsou. Jako příklad můžeme uvést jednu z Gaussových hypotéz, že logaritmická integrální funkce je vždy větší než prvočíselná funkce. To bylo vyvráceno anglickým matematikem Littlewoodem, který ale nedal žádnou horní hranici. S tou přišel až matematik Stanley Skewes. Za předpokladu, že Riemannova hypotéza je pravdivá, dal horní hranici $e\hat{}e\hat{}e\hat{}79$ a za předpokladu, že není pravdivá, dal hranici $e\hat{}e\hat{}e\hat{}e\hat{}7.705$. V dnešní době už máme lepší odhad pro horní hranici, číslo $1.4 \cdot 10^{316}$.

Nyní si ukážeme dva grafy ukazující prvních několik netriviálních nulových bodů. Budeme tedy znázorňovat čísla ve tvaru $\zeta(1/2 + it)$. Zaměříme se na interval $t \in [-30, 30]$.



Obrázek 5.3: Graf velikosti reálné (červená) a imaginární (modrá) složky Riemannovy zeta-funkce $\zeta(s)$ na kritické přímce $\Re(s) = 1/2$ v závislosti na velikosti imaginární složky $x = \Im(s)$. První netriviální nulové body jsou v $\Im(s) = \pm 14.135, \pm 21.022$ a ± 25.011.[32]



Obrázek 5.4: Znázornění části kritické přímky $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) = 1/2, |\Im(s)| \leq 30\}$ v Gaussově rovině po uplatnění transformace $s \to \zeta(s)$.[33]

[32] Riemann hypothesis. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

[33] Riemann hypothesis. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

5.6.4 Spojitost s prvočísly

Na začátku této práce jsme říkali, že odchylka logaritmické integrální funkce a prvočíselné funkce $|\mathrm{Li}(x) - \pi(x)|$ je maximálně $\mathcal{O}(x \ln x)$. Matematik Helge von Koch roku 1901 dokázal, že pokud je β horní hranice reálných složek netriviálních nulových bodů, pak

$$|\mathrm{Li}(x) - \pi(x)| = \mathcal{O}\left(x^{\beta} \ln x\right).$$

Víme, že $1/2 \leq \beta \leq 1$, ale Riemannova hypotéza naznačuje nejlepší možnou odchylku

$$|\mathrm{Li}(x) - \pi(x)| = \mathcal{O}\left(\sqrt{x} \ln x\right).$$

Víc specificky, pro $x > 2657$ naznačuje, že platí

$$|\mathrm{Li}(x) - \pi(x)| < \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \ln x.$$

5.7 Riemannova aproximace prvočíselné funkce

V tomto oddílu jsem vycházel zejména ze článků zveřejněných na webech *Wikipedia*,[34] *MathWorld*[35] a *Cantorsparadise*.[36]

Riemann použil prvočíselnou funkci k tomu, aby si definoval svojí vlastní, kterou dnes nazýváme *Riemannova prvočíselná funkce* a značíme ji $f(x)$ nebo $\Pi(x)$.

5.7.1 Riemannova prvočíselná funkce

Definice 14. Nechť $x \in \mathbb{R}^{+}$, pak *Riemannova prvočíselná funkce*

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi\left(\sqrt[n]{x}\right)}{n} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{x}\right) + \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt[4]{x}\right) + \frac{1}{5}\pi\left(\sqrt[5]{x}\right) + \cdots.$$

Můžeme si všimnout, že tato řada konverguje, protože od určitého bodu bude prvočíselná funkce rovna nule, protože $\pi(x) = 0$ pro $x < 2$.

---

[34] Explicit formulae for L-functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Explicit_formulae_for_L-functions
[35] Riemann Prime Counting Function. *MathWorld* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/RiemannPrimeCountingFunction.html
[36] VEISDAL, Jørgen. *Cantorsparadise* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.cantorsparadise.com/the-riemann-hypothesis-explained-fa01c1f75d3f

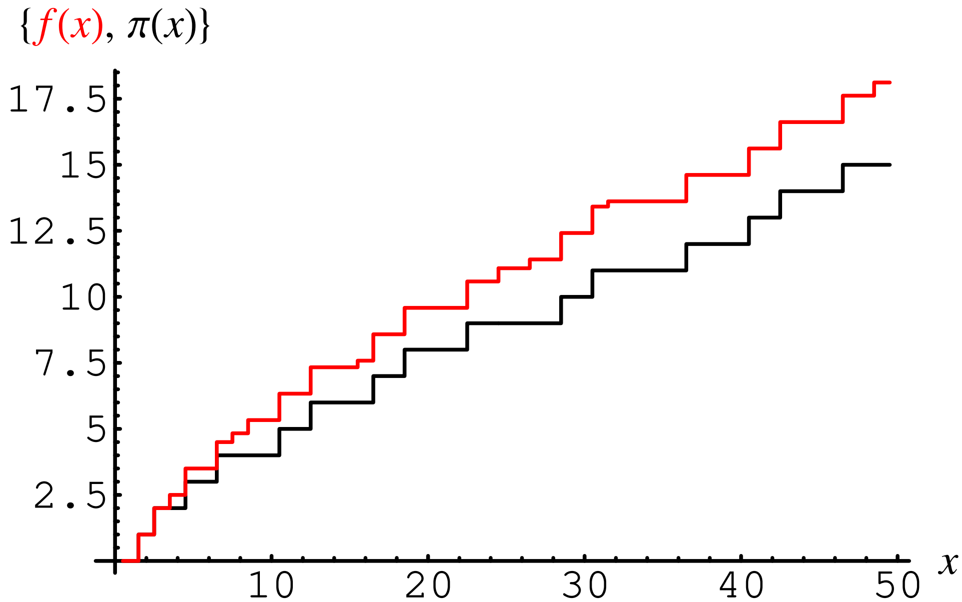
Věta 22. *Nechť* $x \in \mathbb{R}^+$, *pak*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor \log_2(x) \rfloor} \frac{\pi\left(\sqrt[n]{x}\right)}{n}.$$

Důkaz:

$$\sqrt[n]{x} > 2 \Rightarrow x > 2^n \Rightarrow n < \log_2(x).$$

V kontextu sumace potřebujeme, aby hranice sumace byla celé číslo, použijeme tedy funkci *dolní celá část* a získáme $\lfloor \log_2(x) \rfloor$.



Obrázek 5.5: Graf Riemannovy prvočíselné funkce $f(x)$ a prvočíselné funkce $\pi(x)$.[37]

Stejně jako prvočíselná funkce je i Riemannova prvočíselná funkce „skoková“ a její hodnota se zvyšuje nárazově:

$$f(x) \text{ skočí o } \begin{cases} 1, & \text{když } x \text{ je prvočíslo,} \\ 1/2, & \text{když } x \text{ je druhá mocnina prvočísla,} \\ 1/3, & \text{když } x \text{ je třetí mocnina prvočísla.} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

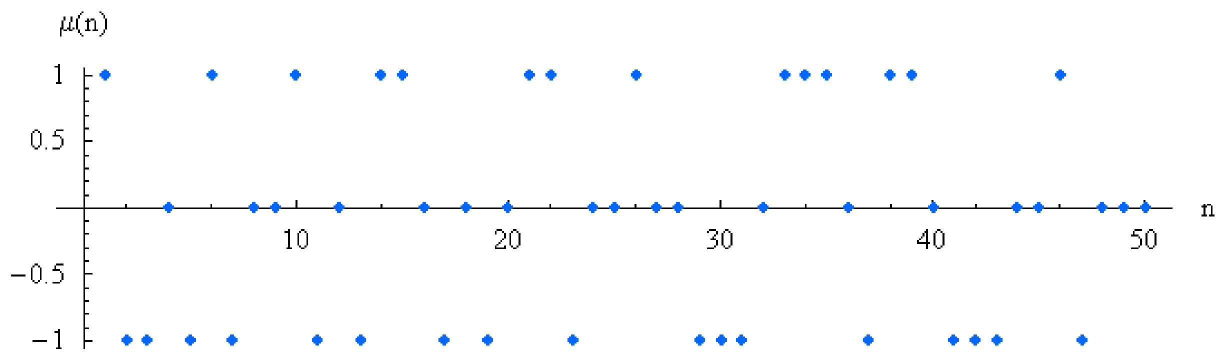
Prvočíselnou funkci lze zpětně vyjádřit pomocí Riemannovy prvočíselné funkce pomocí procesu, kterému se říká *Möbiova transformace*. Tento proces v této práci nebudeme popisovat.

[37] Riemann Prime Counting Function. *MathWorld* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/RiemannPrimeCountingFunction.html

Definice 15. Nechť $n \in \mathbb{N}$, pak *Möbiova funkce*[38]

$$\mu(n) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{pokud je } n \text{ bezčtvercové se sudým počtem prvočíselných dělitelů,} \\ -1, & \text{pokud je } n \text{ bezčtvercové s lichým počtem prvočíselných dělitelů,} \\ 0, & \text{pokud } n \text{ není bezčtvercové,} \end{cases}$$

kde *bezčtvercové číslo* znamená celé číslo, které není dělitelné žádným čtvercem.



Obrázek 5.6: Graf Möbiovy funkce.[39]

Věta 23. *Nechť* $x \in \mathbb{R}^{+}$, *pak*

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{f\left(\sqrt[n]{x}\right)}{n} = f(x) - \frac{1}{2} f\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{3} f\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{1}{5} f\left(\sqrt[5]{x}\right) + \frac{1}{6} f\left(\sqrt[6]{x}\right) - \cdots.$$

5.7.2 Riemannova explicitní prvočíselná věta

Riemannovi se také podařilo pomocí Eulerova součinu propojit jeho zeta-funkci s jeho prvočíselnou funkcí a vznikl tak ekvivalent Eulerova součinu v jazyce kalkulu.

Věta 24. *Nechť* $s \in \mathbb{C},\ \Re(s) > 1$, *pak*

$$\frac{1}{s} \ln \zeta(s) = \int_{0}^{\infty} f(x) x^{-s-1}\, dx.$$

Riemann poté roku 1859 pomocí tohoto vztahu formuloval explicitní prvočíselnou větu hovořící o jeho prvočíselné funkci. Ukazuje v ní, že nuly jeho zeta-funkce řídí oscilace prvočísel kolem jejich „očekávaných“ poloh. Tato věta byla však dokázána až roku 1895.

---

[38] srov. Möbiova funkce. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6biova_funkce

[39] Möbiova funkce. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6biova_funkce

Věta 25. *Nechť* $x \in \mathbb{R},\ x \geq 2$, *pak*

$$f(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) - \ln 2 + \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t},$$

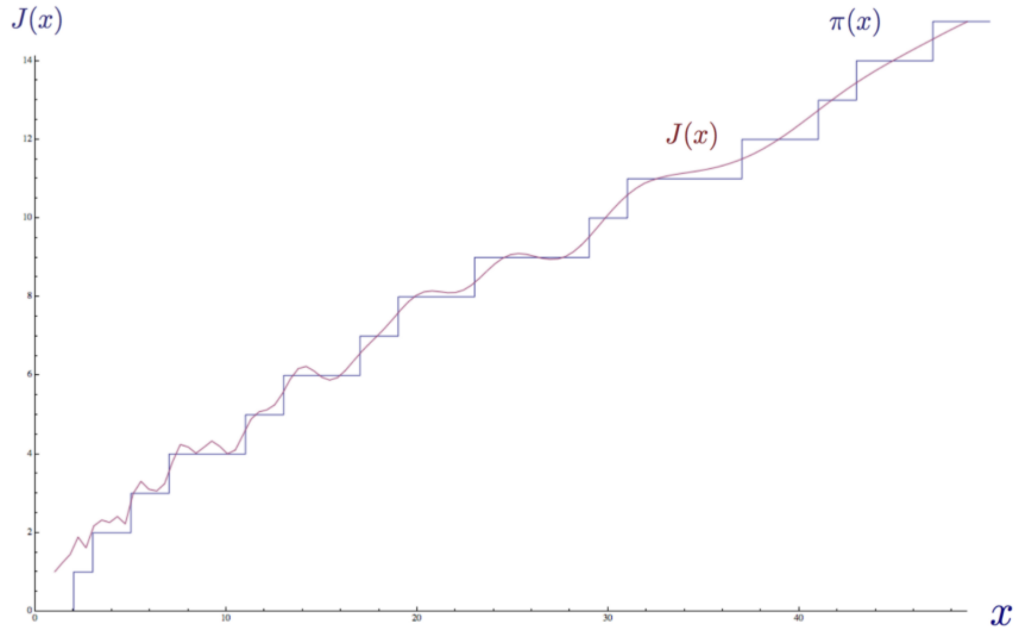
kde $li(x)$ *je logaritmická integrální funkce (neposunutá) a suma je přes všechny netriviální nulové body ρ Riemannovy zeta-funkce. Pokud je Riemannovy hypotéza pravdivá, pak všechny tyto nulové body mají reálnou složku* $\Re(\rho) = 1/2$.

Dominantním členem, který má vždy největší hodnotu je $\mathrm{li}(x)$. Má spojitost s pólem Riemannovy zeta-funkce $\zeta(s)$ v bodě $s = 1$.

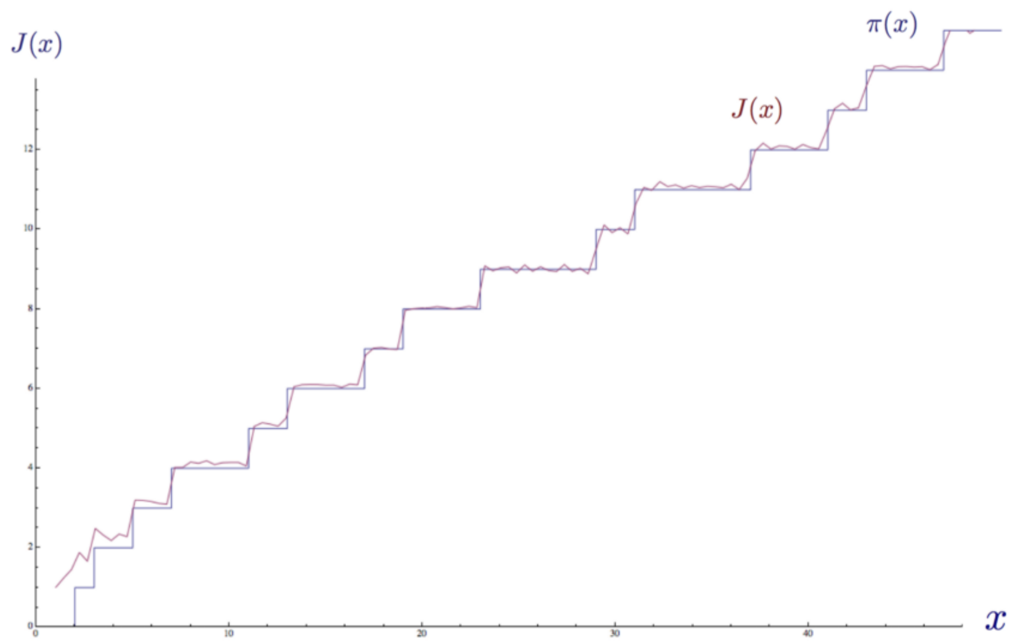
Členy $\mathrm{li}(x^{\rho})$, ve kterých se objevují netriviální nulové body Riemannovy zeta-funkce se musí definovat, protože standardní funkce $\mathrm{li}(x)$ je definovaná pouze pro kladná reálná čísla kromě jedničky. Další problém je, že tato suma nekonverguje absolutně, takže její členy sčítáme vzestupně podle absolutní hodnoty imaginárních složek netriviálních nulových bodů, tedy podle $|\Im(\rho)|$. Tyto členy upravují chybu dominantního členu $\mathrm{li}(x)$.

Zbylé dva členy souvisí s triviálními nulovými body Riemannovy zeta-funkce. Předposlední člen je konstanta $-\ln 2 \approx -0.699$. A poslední člen je integrál, který konverguje pouze pro $x > 1$, ale vzhledem k tomu, že neexistuje žádné prvočíslo $p < 2$ tak, nás zajímají pouze hodnoty pro $x \geq 2$. Tento integrál je monotónně klesající a jeho největší hodnota (≈ 0.14) je v bodě $x = 2$.

Vzhledem k tomu, že jsme schopni vyjádřit prvočíselnou funkci $\pi(x)$ pomocí Riemannovy prvočíselné funkce $f(x)$ a Riemannovu prvočíselnou funkci vyjádřit pomocí nulových bodů Riemannovy zeta-funkce $\zeta(s)$, tak jsme schopni velmi přesně aproximovat hodnotu prvočíselné funkce. Tato aproximace je velké zlepšení od prvočíselné věty $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$. Jak je ukázáno na obrázcích níže, čím více netriviálních nulových bodů použijeme, tím lepší aproximaci dostaneme.



Obrázek 5.7: Graf prvočíselné funkce $\pi(x)$ *a aproximace prvočíselné funkce* $J(x)$ *za použití prvních* 35 *netriviálních nulových bodů Riemannovy zeta-funkce.*[40]



Obrázek 5.8: Graf prvočíselné funkce $\pi(x)$ *a aproximace prvočíselné funkce* $J(x)$ *za použití prvních* 100 *netriviálních nulových bodů Riemannovy zeta-funkce.*[41]

[40] VEISDAL, Jørgen. *Cantorsparadise* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.cantorsparadise.com/the-riemann-hypothesis-explained-fa01c1f75d3f
[41] VEISDAL, Jørgen. *Cantorsparadise* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.cantorsparadise.com/the-riemann-hypothesis-explained-fa01c1f75d3f

Závěr

Ve své seminární práci jsem se věnoval prvočíselné funkci, gama funkci, Dirichletově eta-funkci, Riemannově zeta-funkci a Riemannově hypotéze. Práce obsahuje důkazy konvergence a divergence některých z výše zmíněných funkcí a důkazy některých jejich vlastností a vztahů mezi nimi.

Při zpracovávání této práce jsem si prohloubil své znalosti z oblasti komplexní analýzy a důkazů konvergence a divergence řad a integrálů. Naučil jsem se mnoho nového o výše zmíněných funkcích, zejména definici analytického prodloužení gama funkce, Dirichletovy eta-funkce a Riemannovy zeta-funkce. Také jsem konečně zjistil, jak Euler dokázal Basilejský problém, který mě vždy zajímal. V této práci jsem se mimo jiné seznámil i s Riemannovou hypotézou, což vzhledem k její důležitosti považuji užitečné do budoucna.

Od smrti Riemanna roku 1866 ve věku pouhých 39 let zůstal jeho průlomový článek mezníkem na poli teorie prvočísel a analytické teorie čísel. Dodnes zůstává Riemannova hypotéza o netriviálních nulách Riemannovy zeta-funkce nevyřešena, navzdory rozsáhlému výzkumu mnoha velkých matematiků po téměř dvě století. Každý rok jsou publikovány četné nové důkazy a domněnky spojené s Riemannovou hypotézou v naději, že jednoho dne budeme mít hmatatelný důkaz o její pravdivosti.

Seznam zdrojů

FEHLAU, Jens. Euler's Reflection Formula - Two very ELEGANT Proofs!. *YouTube* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=C1TMEo12DIQ&t=459s

FEHLAU, Jens. I! and the Complex Gamma Function. *YouTube* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=vsdMYADQRkM&t=1553s

CHOW, Steve. An infinite series of an infinite series. *YouTube* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=lV0oFZhghcg&t=609s

VEISDAL, Jørgen. *Cantorsparadise* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://www.cantorsparadise.com/the-riemann-hypothesis-explained-fa01c1f75d3f

Abel summability. *PlaneMath* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://planetmath.org/abelsummability

Basel problem. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Basel_problem

Big O notation. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation

Convergence and divergence of gamma. *StackExchange* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/118207/convergence-of-gammap-for-0p-leq-1-and-divergence-for-p-leq0

Dirichlet eta function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_eta_function

Dirichlet's test. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet%27s_test

Explicit formulae for L-functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Explicit_formulae_for_L-functions

Gamma function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function

Gamma function: Euler's definition as an infinite product. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function#Euler's_definition_as_an_infinite_product

Logarithmic integral function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_integral_function

Möbiova funkce. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6biova_funkce

Particular values of the Riemann zeta function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Particular_values_of_the_Riemann_zeta_function

Polygamma function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Polygamma_function

Prime-counting function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Prime-counting_function

Prove the improper integral of the Gamma function converges. *StackExchange* [online]. [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/628110/prove-the-improper-integral-of-the-gamma-function-gammat-converges-for-z

Proving convergence of the Dirichlet Eta function. *StackExchange* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/2188438/proving-convergence-of-the-dirichlet-eta-function

Riemann hypothesis. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

Riemann Prime Counting Function. *MathWorld* [online]. [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/RiemannPrimeCountingFunction.html

Riemann zeta function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function

Riemannova funkce zeta. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-13]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemannova_funkce_zeta

Stirling's approximation. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling%27s_approximation

Stirlingův vzorec. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-03-12]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Stirling%C5%AFv_vzorec