Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Jakub Smolík

Pascalův trojúhelník

Praha 2022

Anotace

Tato práce pojednává o Pascalově trojúhelníku. Na úvod si povíme něco o jeho historii a poté se přesuneme ke kombinačním číslům. Dokážeme si pár důležitých pravidel a posléze i binomickou větu. Nakonec se zaměříme na samotný trojúhelník, dozvíme se jak jej zkonstruovat a dokážeme si některé jeho vlastnosti. Zjistíme, že se v něm ukrývají známé matematické konstanty, fraktály, posloupnosti a mnoho dalšího.

Klíčová slova

Pascalův trojúhelník, kombinační číslo, binomická věta, faktoriál, klesající mocnina, kombinatorika.

Obsah

1 Historie Pascalova trojúhelníku

V tomto oddílu jsem vycházel z [9]. Asi není velkým překvapením, že francouzský matematik Blaise Pascal nebyl první, koho zaujalo uspořádání kombinačních čísel do trojúhelníku. Zabývalo se jím mnoho matematiků napříč historií, takže je v různých částech světa znám pod různými názvy.

V Indii trojúhelníku přezdíval matematik Halayudha „Schodiště hory Meru" více než sedm set let před Pascalem. Přibližně sto let po něm jej popsal Perský matematik Omar Khayyám, takže v Íránu se trojúhelníku dnes říká „Khayyámův trojúhelník." Aby toho nebylo málo, tak jej ve třináctém století studoval Čínský matematik Yang Hui a v Číně se mu tedy dodnes říká „Yang Huiho trojúhelník." Ani v Evropě nebyl Pascal první.V Itálii se jím zabýval matematik Niccolò Tartaglia, a dodnes se tam nazývá „Tartagliův trojúhelník."

Pascal až roku 1655 publikoval práci „Pojednání o Aritmetickém Trojúhelníku," ve které pojednával o trojúhelníku a použil jej k řešení problémů v teorii pravděpodobnosti. Trojúhelníku se začalo říkat Pascalův až na začátku osmnáctého století, kdy jej spojili s Pascalem matematici Pierre Raymond de Montmort a Abraham de Moivre.

2 Kombinační čísla

V tomto oddílu jsem vycházel z [4]. V kombinatorice se často snažíme spočítat, kolik existuje objektů dané vlastnosti. Jedna z nejpřirozenějších otázek je, kolik obsahuje n-prvková množina k-prvkových podmnožin. Jedním z možných řešení je představit si, že tuto k-prvkovou podmnožinu budujeme. První prvek můžeme vybrat n způsoby, druhý už pouze $n-1$ způsoby atd. Poslední, k-tý prvek lze vybrat $n-k+1$ způsoby. Právě jsme vytvořili $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ posloupností k prvků, za každou podmnožinu celkem $k!$ permutací. Odpověď na naši otázku tedy je

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Čísla tohoto tvaru jsou pro nás natolik významná, že mají vlastní jméno. Nazývají se kombinační čísla a v kontextu binomické věty se jim také někdy říká binomické koeficienty. V této práci si je definujeme pomocí klesajících mocnin.

Definice 1 (klesající mocnina)**.** Nechť $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$. Potom k-tou *klesající mocninu* čísla r definujeme jako

$$r^{\underline{k}} := \overbrace{r(r-1)\cdots(r-k+1)}^{k \text{ členů}}.$$

Pro $k = 0$ dostáváme prázdný součin, a hodnota $r^{\underline{0}}$ je tedy 1.

Definice 2 (kombinační číslo)**.** Nechť $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Potom *kombinační číslo* $\binom{r}{k}$ (čteme „r nad k") definujeme jako

$$\binom{r}{k} := \begin{cases} r^{\underline{k}}/k!, & \text{pro } k \geq 0, \\ 0, & \text{pro } k < 0, \end{cases}$$

kde r nazýváme *horní index* a k nazýváme *dolní index*. V kontextu přirozených čísel nebo nuly budeme horní index značit n pro snadnější rozlišování.

Všimněme si, že speciálně pro $n, k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq n$ platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Kombinační čísla mají mnoho vlastností, ukážeme si několik nejdůležitějších.

Tvrzení 1 (pravidlo souměrnosti)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$, potom*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1}$$

Důkaz. Pravidlo souměrnosti platí, protože pro $k < 0$ jsou obě strany nulové a pro $k \geq 0$ lze mezi množinou všech k-prvkových podmnožin a množinou všech $(n-k)$-prvkových podmnožin sestrojit bijekci, která každé k-prvkové podmnožině přiřadí její $(n-k)$-prvkový doplněk.

❑

Obdobou pravidla souměrnosti pro horní indexy je horní negace.

Tvrzení 2 (horní negace)**.** *Nechť $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, potom*

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}. \tag{2}$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení je snadný, protože

$$(-r)^{\underline{k}} = (-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1) = (-1)^k (r+k-1)^{\underline{k}}.$$

Dosazením $-r$ za r získáme (2). Speciálním případem horní negace je $\binom{-1}{k} = (-1)^k$.

❑

Další pravidlo nám umožňuje manipulovat s indexy kombinačních čísel.

Tvrzení 3 (pravidlo extrakce)**.** *Nechť $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, potom*

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}, \tag{3}$$

$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}, \tag{4}$$

$$k\binom{r}{k} = (r-k+1)\binom{r}{k-1}. \tag{5}$$

Důkaz. První identita plyne z definice 2, protože $r^{\underline{k}} = r(r-1)^{\underline{k-1}}$ a $k! = k(k-1)!$ pro $k > 0$; obě strany jsou nulové pro $k \leq 0$. Druhá identita platí, protože $r(r-1)^{\underline{k}} = r^{\underline{k}}(r-k)$ pro $k \geq 0$; obě strany jsou opět nulové pro $k < 0$. Třetí identitu získáme aplikací (4) na pravou stranu (3). Pro $r, k \in \mathbb{N}$ mají všechny tyto identity hezký kombinatorický význam.

❑

Pascalovo pravidlo budeme potřebovat ke konstrukci Pascalova trojúhelníku.

Tvrzení 4 (Pascalovo pravidlo)**.** *Nechť* $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$*, potom*

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}. \tag{6}$$

Důkaz. Pascalovo pravidlo můžeme dokázat sečtením prvních dvou extrakčních identit (3) a (4):

$$(r-k)\binom{r}{k} + k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k} + r\binom{r-1}{k-1};$$

vydělení obou stran rovnice $r \neq 0$ nám dá (6). Případ $r = 0$ je lehké zkontrolovat.

Pro $r \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq r$ můžeme také využít vztah mezi kombinačními čísly a množinami. Nechť A je nějaká n-prvková množina obsahující prvek a, potom k-prvkové podmnožiny množiny A lze rozdělit do dvou kategorií. Na ty, které obsahují prvek a, těch je $\binom{n-1}{k-1}$, a na ty, které jej neobsahují, těch je $\binom{n-1}{k}$. Celkem jich ale musí být $\binom{n}{k}$, což dokazuje Pascalovo pravidlo.

❑

Zajímavá je také hodnota kombinačních čísel s horním indexem ve tvaru „celé číslo minus jedna polovina.“

Tvrzení 5. *Nechť* $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$*, potom*

$$\binom{r}{k}\binom{r-1/2}{k} = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2r}{2k}\binom{2k}{k}. \tag{7}$$

Důkaz. Vyjdeme z

$$r^{\underline{k}}\left(r-\tfrac{1}{2}\right)^{\underline{k}} = \frac{(2r)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}, \qquad k \geq 0.$$

Tato identita je zřejmá, když rozepíšeme klesající mocniny a členy na levé straně uspořádáme sestupně:

$$r(r-\tfrac{1}{2})(r-1)(r-\tfrac{3}{2})\cdots(r-k+1)(r-k+\tfrac{1}{2}) = \frac{2r(2r-1)\cdots(2r-2k+1)}{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}.$$

Nyní obě strany rovnice vydělíme $k!^2$ a dostaneme

$$\frac{r^{\underline{k}}}{k!}\cdot\frac{\left(r-\frac{1}{2}\right)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{(2r)^{\underline{2k}}}{(2k)!}\cdot\frac{(2k)!}{k!k!} \Rightarrow \binom{r}{k}\binom{r-1/2}{k} = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2r}{2k}\binom{2k}{k}.$$

Všimněme si, že poslední rovnost platí i pro $k < 0$.

❑

Důsledek. Když položíme $k = r = n$, kde $n \in \mathbb{Z}$, tak vyjde

$$\binom{n-1/2}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

a horní negací (2) levé strany získáme

$$\binom{-1/2}{n} = \left(\frac{-1}{4}\right)^n\binom{2n}{n}. \tag{8}$$

3 Binomická věta

V tomto oddílu jsem vycházel především z [4] a [7]. Binomická věta hovoří o rozložení n-té mocniny dvojčlenu na součet $n+1$ sčítanců.

Věta 6 (binomická věta)**.** *Nechť $x, y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$, potom*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Důkaz. Binomickou větu lze dokázat matematickou indukcí podle n, ale pěknou alternativou je kombinatorický důkaz. Výraz $(x+y)^n$ rozepíšeme na součin n dvojčlenů

$$(x+y)^n = \overbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}^{n \text{ členů}}.$$

Během roznásobování si z právě k členů vybereme y a z $n-k$ členů si vybereme x. Protože si z celkových n členů vybíráme k-krát y, tak je $\binom{n}{k}$ způsobů jak to udělat. Čímž získáme výraz $\binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. Aby binomická věta platila i pro $x = 0$ nebo $y = 0$, tak musíme dodefinovat $0^0 := 1$, což v kombinatorice dává smysl. ❑

Věta 7 (zobecněná binomická věta)**.** *Nechť $x, y \in \mathbb{C}, |x| > |y|$ a $r \in \mathbb{R}$, potom*

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} y^k. \tag{9}$$

Důkaz. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je funkce daná předpisem $f(z) = (z+x)^r$. Pak k-tá derivace f je

$$f^{(k)}(z) = r^{\underline{k}} (z+x)^{r-k},$$

z toho získáme Taylorovu řadu f se středem v 0:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \Rightarrow (z+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{\underline{k}}\, x^{r-k}}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} z^k.$$

Přejmenováním z na y obdržíme rovnost (9). Nyní ukážeme, že pro $|x| > |y|$ tato řada konverguje absolutně. Použijeme podílové kritérium:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{r}{k+1} x^{r-(k+1)} y^{k+1}}{\binom{r}{k} x^{r-k} y^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{r^{\underline{k+1}}}{r^{\underline{k}}} \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{y}{x} \right| \lim_{k\to\infty} \left| \frac{r-k}{k+1} \right| = \frac{|y|}{|x|} < 1.$$

❑

Poznámka. Věta 7 by platila i pro $r \in \mathbb{C}$, ale museli bychom nejprve definovat komplexní mocninu.

Dosazením do zobecněné binomické věty můžeme najít součty některých řad. Například volbou $x = 1, y = -x, r = -n$ a horní negací (2) dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

Nebo volbou $x = 1, y = -x, r = -\frac{1}{2}$ a použitím (8) bychom získali

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^k \binom{2k}{k}.$$

4 Pascalův trojúhelník

V tomto oddílu jsem vycházel převážně z [1], [7] a [9]. Pascalův trojúhelník je šikovné uspořádání kombinačních čísel do trojúhelníku. Zkonstruujeme jej tak, že do první řady dáme číslo 1. Prvky dalších řad vždy vytvoříme sečtením dvou nejbližších prvků, které se nacházejí o řadu výš, což funguje díky Pascalovu pravidlu (6). Řady i prvky řad Pascalova trojúhelníku budeme indexovat od nuly, aby platilo, že k-tý prvek n-té řady je $\binom{n}{k}$. V Pascalově trojúhelníku jsou krásně vidět vlastnosti kombinačních čísel. My se seznámíme s několika nejzajímavějšími a dokážeme si je.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Obrázek 1: Prvních šest řad Pascalova trojúhelníku, zdroj: [10].

Všimněme si, že bychom Pascalův trojúhelník mohli definovat i trochu jinak. A sice, že každé číslo udává počet cest, které do něj vedou z vrcholu trojúhelníku, přičemž se můžeme pohybovat pouze doleva $\swarrow$ nebo doprava $\searrow$. Funguje to, protože pokud se chceme dostat do k-tého prvku n-té řady, tak musíme na n křižovatkách k-krát zahnou doleva. Tohle se hodí například při důkazu Leibnizovy formule pro n-tou derivaci součinu dvou funkcí.

Věta 8 (Leibnizova formule)**.** *Nechť f a g jsou n-krát derivovatelné funkce, pak je součin těchto funkcí také n-krát derivovatelný a platí pro něj*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Důkaz. Leibnizovu formuli lze podobně jako binomickou větu dokázat matematickou indukcí podle n. My ji ale dokážeme kombinatoricky. Vyjdeme ze součinového pravidla $(fg)' = f'g + fg'$. Vždy, když je použijeme, tak dochází k určitému větvení na případ, kdy jsme derivovali f a na případ, kdy jsme derivovali g. V naší analogii si vybíráme, jestli zahneme doleva nebo doprava. Abychom po n derivacích dospěli k výrazu $f^{(n-k)}g^{(k)}$, tak musíme zderivovat g právě k-krát, což je možné udělat $\binom{n}{k}$ způsoby.

❑

4.1 Vlastnosti plynoucí z Binomické věty

Chytrým dosazením do binomické věty 6 můžeme obdržet různé pěkné rovnosti. Například volbou $x = 1$ a $y = 1$ dokážeme, že součet prvků n-té řady Pascalova trojúhelníku je roven 2^n:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Zároveň jsme ukázali, že počet všech podmnožin n-prvkové množiny je 2^n. Volbou $x = 1$ a $y = -1$ dostáváme

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Takže

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots .$$

Čímž jsme ukázali, že počet lichých a sudých podmnožin n-prvkové neprázdné množiny je stejný. Lichou, resp. sudou podmnožinou myslíme podmnožinu s lichým, resp. sudým počtem prvků. Důsledek pro Pascalův trojúhelník je, že kdybychom k sobě střídavě přičítali a odečítali prvky libovolné řady (kromě nulté), tak výsledek bude roven nule. Další zajímavou volbou může být třeba $x = 10$ a $y = 1$.

4.2 Vlastnosti k-tých prvků řad

Nejprve si dokážeme tvrzení o hokejkách a pomocí něj zdůvodníme další vlastnosti.

Tvrzení 9 (o hokejkách)**.** *Sečtením k-tých prvků všech řad až po n-tou řadu získáme $(k+1)$-ní prvek $(n+1)$-ní řady. Nechť $n, k \in \mathbb{N}_0, 0 \le k \le n$, potom*

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

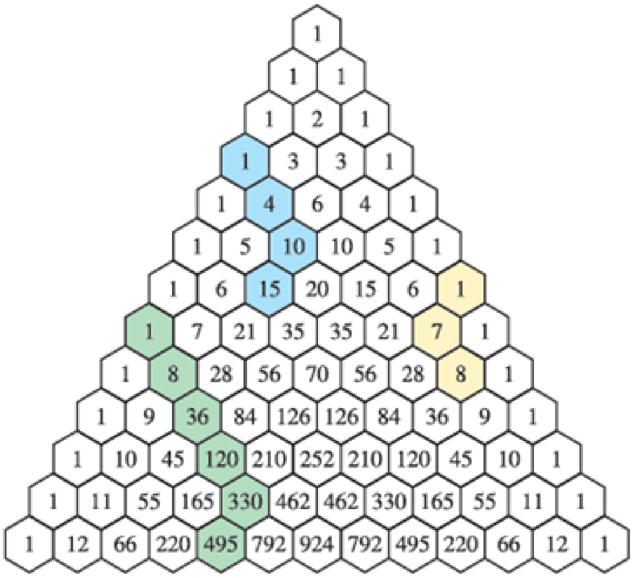
Důkaz. Všimněme si, že tvrzení o hokejkách vyplývá z opakované aplikace Pascalova pravidla (6). Formálně je lze dokázat matematickou indukcí podle n.

První krok: $n = k \geq 0$: $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$, což platí. V indukčním kroku vyjdeme z předpokladu, že tvrzení platí pro n a ukážeme, že potom platí i pro $n+1$.

$$\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

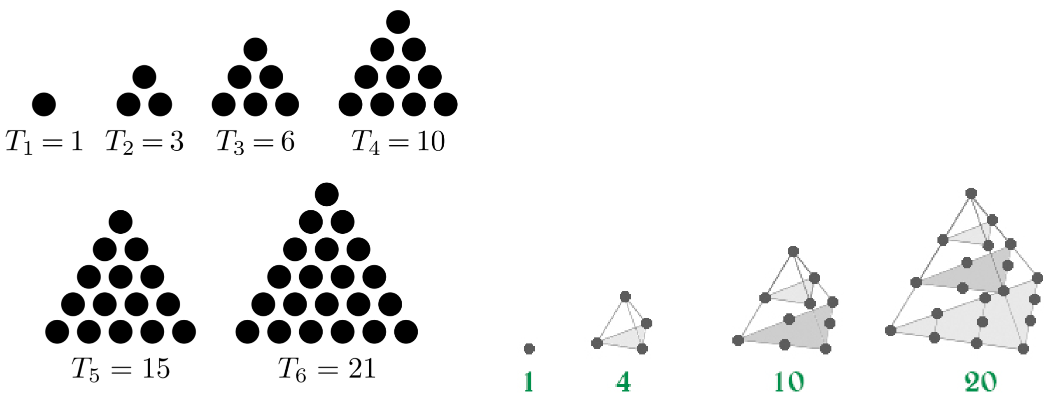
❏

Díky pravidlu souměrnosti (1) můžeme vytvářet i „hokejky“ s opačnou orientací.



Obrázek 2: Pascalův trojúhelník se třemi vyznačenými hokejkami, zdroj: [5].

Nyní můžeme pomocí tvrzení o hokejkách nahlédnou následující. První prvek n-té řady je roven n, protože $\binom{n}{1} = n$. Druhý prvek n-té řady je n-té trojúhelníkové číslo, tedy součet prvních n přirozených čísel. Třetí prvek n-té řady je součet prvních n trojúhelníkových čísel, známý jako n-té pyramidové číslo. Mohli bychom pokračovat a bavit se o dalších prvcích, například čtvrté prvky řad by vytvářely čtyř-dimenzionální obdoby našich pravidelných čtyřstěnů. Obecně se těmto číslům říká figurální čísla.



Obrázek 3: Vizualizace trojúhelníkových a pyramidových čísel, zdroje: [12], [3].

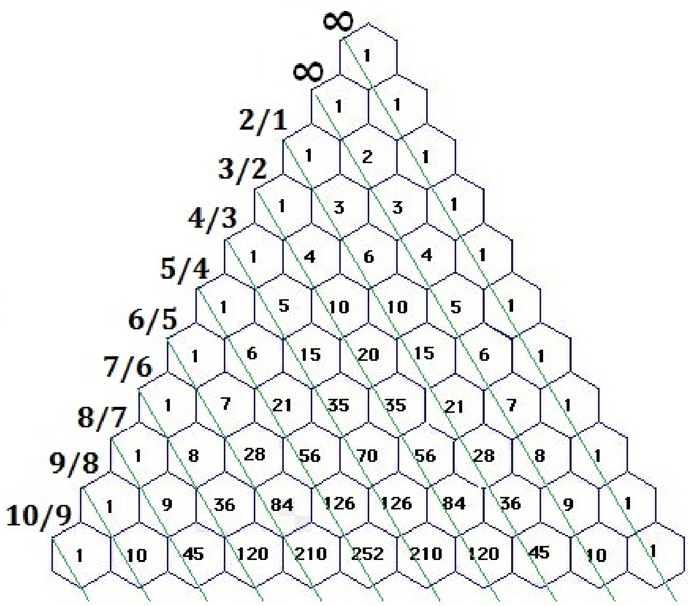
S touto znalostí můžeme z Pascalova trojúhelníku přímo číst ne zcela triviální součty některých řad, například

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$$

nebo

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \binom{n+1}{4} = \frac{1}{24}(n+1)n(n-1)(n-2).$$

Až doposud jsme sčítali k-té prvky řad, ale teď se budeme zabývat sčítáním jejich převrácených hodnost, přičemž se nezastavíme u n-té řady, ale budeme pokračovat až do nekonečna. Pro nulté prvky bude naše řada samozřejmě divergovat, pro první prvky dostaneme harmonickou řadu, která také diverguje. Ostatní řady už ale budou konvergovat.



Obrázek 4: Vyznačení sum převrácených hodnot k-tých prvků řad, zdroj: [1].

Tvrzení 10. *Součet převrácených hodnot k-tých prvků řad Pascalova trojúhelníku konverguje k hodnotě $k/(k-1)$. Nechť $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, potom*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{k-1}.$$

Důkaz. Nejprve upravíme výraz uvnitř sumy tak, abychom dostali teleskopickou řadu. Máme

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k!}{n^{\underline{k}}} = \frac{k!}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}.$$

Rozkladem na parciální zlomky získáme

$$\frac{1}{(n-k+1)n} = \frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n}\right).$$

Takže

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{n}{k}} &= \frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{n-k+1}-\frac{1}{n}\right)\frac{k!}{(n-k+2)\cdots(n-1)} = \\
&= \frac{k!}{k-1}\left(\frac{1}{(n-k+1)\cdots(n-1)}-\frac{1}{(n-k+2)\cdots n}\right) = \\
&= \frac{k!}{k-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\underline{k-1}}}-\frac{1}{n^{\underline{k-1}}}\right).
\end{aligned}$$

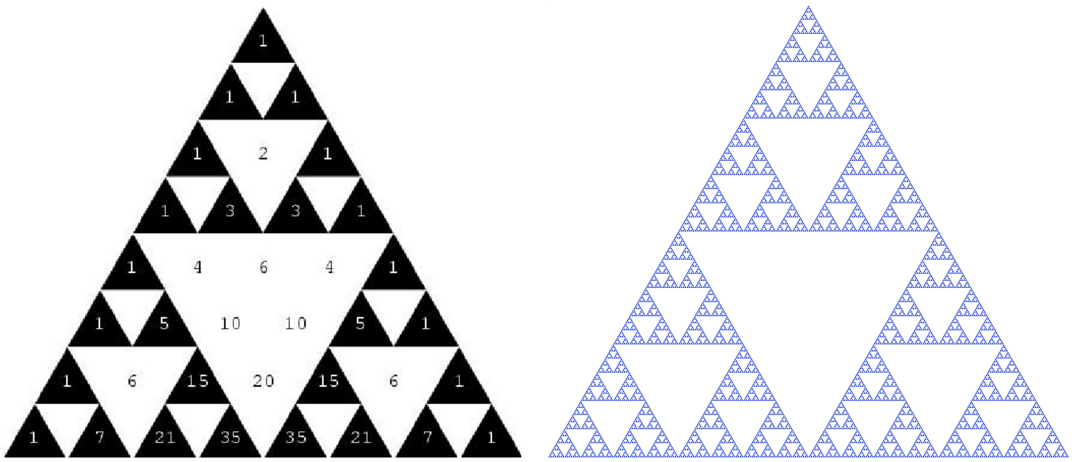
Nyní už stačí pouze vyřešit vzniklou teleskopickou řadu:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{\binom{n}{k}} &= \frac{k!}{k-1}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\underline{k-1}}}-\frac{1}{n^{\underline{k-1}}}\right) = \\
&= \frac{k!}{k-1}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)^{\underline{k-1}}}-\frac{1}{n^{\underline{k-1}}}\right) = \\
&= \frac{k!}{k-1}\lim_{N\to\infty}\left[\left(\frac{1}{(k-1)^{\underline{k-1}}}-\frac{1}{k^{\underline{k-1}}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(N-1)^{\underline{k-1}}}-\frac{1}{N^{\underline{k-1}}}\right)\right] = \\
&= \frac{k!}{k-1}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{(k-1)^{\underline{k-1}}}-\frac{1}{N^{\underline{k-1}}}\right] = \frac{k!}{k-1}\cdot\frac{1}{(k-1)!} = \frac{k}{k-1}.
\end{aligned}$$

$\square$

4.3 Sierpinského trojúhelník

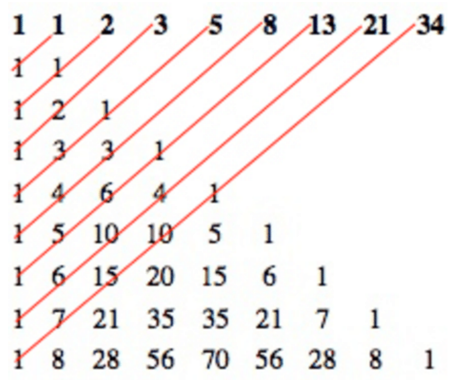
Pokud vybarvíme liché prvky Pascalova trojúhelníku černě (a náš trojúhelník bude nekonečný), tak dostaneme fraktál známý jako Sierpinského trojúhelník. Tohle funguje, protože sečtením dvou lichých nebo dvou sudých čísel dostaneme sudé číslo, zatímco sečtením sudého a lichého čísla dostaneme liché číslo.



Obrázek 5: Vybarvený Pascalův trojúhelník a Sierpinského trojúhelník, zdroje: [6], [11].

4.4 Fibonacciho posloupnost

V Pascalově trojúhelníku získáme n-tý člen Fibonacciho posloupnosti sečtením prvků ležících na diagonále začínající prvkem $\binom{n-1}{0}$. Pro přehlednější znázornění diagonál zarovnáme Pascalův trojúhelník doleva. V této formě je každý prvek roven součtu čísla ležícího přímo nad ním s číslem vlevo od něj. Všimněme si, že prvky nové diagonály vzniknou jako součet prvků předchozích dvou diagonál, což je v této tabulkové formě Pascalova trojúhelníku dobře vidět. Fibonacciho posloupnost vznikne, protože první dvě diagonály obsahují pouze jedničku.



Obrázek 6: Pascalův trojúhelník v tabulkové formě s diagonálami, zdroj: [8].

4.5 Eulerovo číslo

V Pascalově trojúhelníku se mimo jiné skrývá i Eulerovo číslo.

Tvrzení 11. *Označme součin prvků n-té řady Pascalova trojúhelníku p_n, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}\, p_{n+1}}{p_n^2} = e.$$

Důkaz. Definujme si podíl p_{n+1} a p_n jako

$$P(n) := \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}\, p_{n+1}}{p_n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{P(n-1)}$. Ekvivalentními úpravami dostaneme

$$P(n) = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)^{\underline{k}}}{k!}}{\prod_{k=0}^{n} \frac{n^{\underline{k}}}{k!}} = \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^{\underline{k}}}{k!}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{n^{\underline{k}}}{k!}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(n+1)^{\underline{k}}}{n^{\underline{k}}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n-k+1} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Takže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{P(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

❑

4.6 Ludolfovo číslo

Asi není velkým překvapením, že se v Pascalově trojúhelníku objevuje i Ludolfovo číslo. Jedním z nejpřímějších způsobů jak π získat je sestrojit Leibnizovu řadu z prvních prvků řad,

$$\frac{1}{\binom{1}{1}} - \frac{1}{\binom{3}{1}} + \frac{1}{\binom{5}{1}} - \frac{1}{\binom{7}{1}} + \frac{1}{\binom{9}{1}} - \frac{1}{\binom{11}{1}} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Co už není na první pohled zřejmé, je že pokud k sobě budeme střídavě přičítat a odečítat dvojice převrácených hodnot druhých prvků řad, tak dostaneme $\pi - 2$,

$$\frac{1}{\binom{2}{2}} + \frac{1}{\binom{3}{2}} - \frac{1}{\binom{4}{2}} - \frac{1}{\binom{5}{2}} + \frac{1}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{\binom{7}{2}} - \cdots = \pi - 2.$$

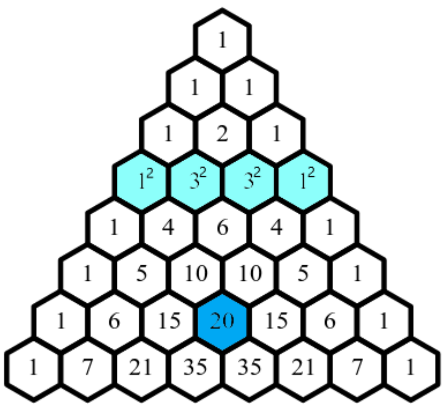
Nebo bychom mohli využít třetí prvky řad

$$\frac{1}{\binom{4}{3}} - \frac{1}{\binom{6}{3}} + \frac{1}{\binom{8}{3}} - \frac{1}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{\binom{12}{3}} - \frac{1}{\binom{14}{3}} + \cdots = \frac{3}{2}(\pi - 3).$$

Tyto řady ale nekonvergují absolutně a úpravy druhé a třetí uvedené řady na známé řady pro π nejsou zajímavé, takže se jimi zde nebudeme zabývat.

4.7 Součet čtverců prvků řady

Sečtením druhých mocnin prvků n-té řady Pascalova trojúhelníku dostaneme prostřední, tedy n-tý prvek $2n$-té řady.



Obrázek 7: Ukázka součtu čtverců třetí řady Pascalova trojúhelníku, zdroj: [2].

Tvrzení 12. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, potom*

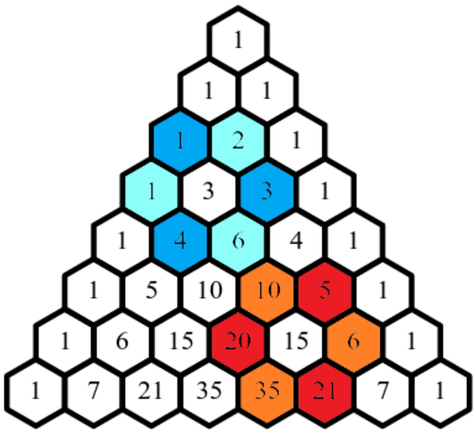
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}. \tag{10}$$

Důkaz. Nechť A a B jsou dvě disjunktní n-prvkové množiny. Nejprve si z A vybereme k-prvkovou podmnožinu a poté si z B vybereme $(n-k)$-prvkovou podmnožinu. Pokud tento proces zopakujeme pro všechna $0 \leq k \leq n$, tak nalezneme všechny n-prvkové podmnožiny sjednocení množin A a B, které mají dohromady $2n$ prvků, což dokazuje (10).

❑

4.8 Tvrzení o kytičkách

Zvolme si buňku Pascalova trojúhelníku, která se nenachází na jeho okraji, to bude střed naší kytičky. S touto buňkou sousedí šest dalších, které tvoří její okvětní lístky. Okvětní lístky obarvíme dvěma barvami tak, aby dva sousední lístky nikdy neměly stejnou barvu. Tvrzení o kytičkách říká, že součiny okvětních lístků stejné barvy jsou totožné.



Obrázek 8: Ukázka dvou „kytiček“ v Pascalova trojúhelníku, zdroj: [2].

Tvrzení 13 (o kytičkách)**.** *Nechť* $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$*, potom*

$$\binom{r-1}{k-1}\binom{r+1}{k}\binom{r}{k+1} = \binom{r}{k-1}\binom{r-1}{k}\binom{r+1}{k+1}.$$

Důkaz. Pravdivost tvrzení o kytičkách pro $k > 0$ lze nahlédnout následující úpravou klesajících mocnin:

$$(r-1)^{\underline{k-1}}(r+1)^{\underline{k}}r^{\underline{k+1}} = (r-1)^{\underline{k-1}}(r+1)r^{\underline{k-1}}r^{\underline{k}}(r-k) = (r-1)^{\underline{k}}r^{\underline{k-1}}(r+1)^{\underline{k+1}};$$

obě strany jsou nulové pro $k \leq 0$.

❑

4.9 Násobky prvočísel

Tvrzení 14. *Nechť n je prvočíslo. Potom jsou všechny prvky n-té řady Pascalova trojúhelníku, kromě prvního a posledního, celočíselné násobky čísla n.*

Důkaz. Víme, že k-tý prvek n-té řady Pascalova trojúhelníku má hodnotu

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Pokud je n prvočíslo a $1 \leq k \leq n-1$, tak neexistuje způsob, jak by se n mohlo objevit ve jmenovateli, takže po zkrácení vždy zůstane v čitateli. Výsledek tedy bude celočíselný násobek čísla n.

❑

4.10 Catalanova čísla

Catalanova čísla jsou čísla ve tvaru

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Prvních několik hodnot C_n pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ je $1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$ Objevují se v odpovědích na překvapivé množství kombinatorických úloh, např. počet korektních uzávorkování n párů závorek je C_n. Z Pascalova trojúhelníku lze n-té Catalanovo číslo získat jako rozdíl prostředního prvku $2n$-té řady a jeho souseda.

Tvrzení 15. *Nechť $n \in \mathbb{N}_0$, potom*

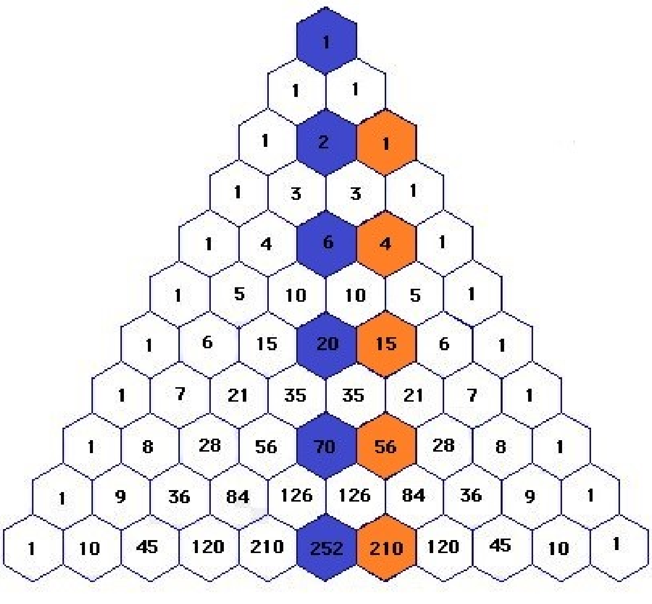
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Důkaz. Úpravou této rovnice získáme

$$n\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n-1},$$

což platí podle třetí extrakční identity (5).

❑



Obrázek 9: Vyznačení dvojic dávajících Catalanova čísla, zdroj: [1].

Odkazy

[1] Alexander Bogomolny. *Patterns in Pascal's Triangle*. Zář. 2016. URL: https://bit.ly/3NQws5A (cit. 09. 11. 2022).

[2] Mark A. C. Eggensperger. *Benefits of Pascal's triangle: Number of ways to traverse a graph*. Led. 2022. URL: https://markeggensperger.medium.com/benefits-of-pascals-triangle-number-of-ways-to-traverse-a-graph-3b6ea592aa7 (cit. 09. 11. 2022).

[3] GeeksforGeeks. *Tetrahedral numbers*. URL: https://www.geeksforgeeks.org/tetrahedral-numbers/ (cit. 09. 11. 2022).

[4] Robert M. Graham, Donald E. Knuth a Oren Patashnik. *Concrete mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, 1994, s. 153–186. ISBN: 0-201-55802-5.

[5] Chegg. *Hockey Stic Problem*. URL: https://che.gg/3UL37vk (cit. 09. 11. 2022).

[6] Klee Irwin. „Toward the Unification of Physics and Number Theory“. In: (pros. 2019). DOI: 10.1142/S2424942419500038.

[7] Jiří Matoušek a Jaroslav Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Karolinum, 2022, s. 76–84. ISBN: 978-80-246-5084-5.

[8] Arthur Powell, Frank Lai a Kate O'Hara. „Supplemental Curriculum Unit for Online, Collaborative Problem Solving in VMT“. In: (říj. 2009).

[9] Wikipedia, the free encyclopedia. *Pascal's Triangle*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle (cit. 09. 11. 2022).

[10] Wikipedia, the free encyclopedia. *Pascal's Triangle*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PascalsTriangleCoefficient.svg (cit. 09. 11. 2022).

[11] Wikipedia, the free encyclopedia. *Sierpinsky Triangle*. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sierpinski_triangle.svg (cit. 09. 11. 2022).

[12] Wikipedia, the free encyclopedia. *Triangular number*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number (cit. 09. 11. 2022).