Gymnázium Kladno, náměstí Edvarda Beneše 1573

Neurčitý integrál

Seminární práce z matematiky

Jakub Smolík

Třída O8

Rok zpracování: 2021/2022

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji seminární práci vypracoval samostatně a s použitím uvedené literatury a pramenů.

V………………………, dne………………… …………………………………..

Jakub Smolík

Obsah

Úvod

Tato seminární práce se věnuje základní teorii neurčitého integrálu a integračním metodám. Vybral jsem si toto téma, protože znalost integračních metod je zásadní při počítání určitých integrálů, které jsou nesmírně užitečné jak v matematice, tak ve fyzice a dalších vědách.

Cílem této práce je definovat hyperbolické a hyperbolometrické funkce, které se na střední škole běžně neučí, ale při integraci se někdy používají. A dále zevrubně popsat všechny základní integrační metody a pro lepší pochopení vyřešit příklady.

Tato práce je rozdělena do čtyř kapitol.

V první kapitole se seznámíme se stručnou historií integrálního počtu, budeme se bavit o sporu o prvenství mezi Newtonem a Leibnizem a zmíníme se i o dalších matematicích, kteří se zabývali infinitezimálním počtem.

Ve druhé kapitole si definujeme hyperbolické funkce a seznámíme se s jejich vlastnostmi. Ukážeme si Osbornovo pravidlo a najdeme derivace těchto funkcí.

Ve třetí kapitole si definujeme funkce inverzní k hyperbolickým, tedy funkce hyperbolometrické a najdeme jejich derivace

Ve čtvrté kapitole se zaměříme na samotný neurčitý integrál. Definujeme si primitivní funkci, ukážeme si tabulkové integrály a postupně se zaměříme na všechny základní integrační metody. Začneme metodou per partes, která nám umožňuje integrovat součin dvou funkcí. Pak se budeme zabývat metodou substituce, a nakonec rozkladem na parciální zlomky. Také si ukážeme metodu racionalizace integrálu.

V závěru této práce se nachází seznam vyřešených příkladů.

1 Historie integrálního počtu

Vynález kalkulu (infinitezimálního počtu) většinou přisuzujeme anglickému matematikovi a fyzikovi Isaacu Newtonovi (1642-1727) a německému matematikovi a filozofovi Gottfriedu Wilhelmu Leibnizovi (1646-1716). Nad koncepty míry změny a limity však bádala i řada matematiků v minulosti. Například ve starověkém Egyptě vytvořili pravidla pro výpočet objemu pyramidy a v antickém Řecku Archimédes aproximoval obsah kruhu a obsah plochy pod parabolou. Ve druhé polovině 17. století se Newton a Leibniz nezávisle na sobě zabývali problémy tečen, míry změn, minim, maxim a infinitezimálních (nekonečně malých) hodnot. Oba pochopili, že diferenciální počet (zjišťování tečny ke křivce v určitém bodě) a integrální počet (zjišťování obsahu plochy pod křivkou) jsou vzájemně opačné postupy.[1]

V roce 1665, kdy Newton úspěšně dokončil studium na *Trinity College v Cambridgi*, zasáhla Anglii rozsáhlá epidemie moru. Stáhl se proto na dva roky na venkov, kde měl klid a čas promýšlet své fyzikální a matematické teorie. Zabýval se zejména konceptem gravitace (tento pojem v této době ještě neexistoval), ale pro dokázání pravdivosti jeho teorie potřeboval nový matematický aparát. Takže v letech 1665-1666 prostřednictvím zkoumání nekonečných součtů vynalezl kalkulus, který použil na dokázání jeho teorie. Newton, ale s publikací svých poznatků nespěchal. Po návratu na Trinity College v roce 1667, kde začal působit jako mladý profesor, ve svých studiích pokračoval. „Výsledkem bylo rozsáhlé a na svou dobu revoluční dílo *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, v dějinách matematických a fyzikálních věd známé jako Principia.“[2] Kniha vyšla až roku 1687, takže dlouho po jeho objevu kalkulu. „Spis především udělal pořádek ve fyzice tehdejší doby. Newton v něm uveřejnil své zákony mechaniky, hlavně v něm přišel s gravitací – se slovem a především s představou. Byla to tehdy revoluční myšlenka o síle, která působí na dálku, bez přímého kontaktu – nešlo to dohromady s karteziánským chápáním světa a mnoha Newtonovým současníkům, hlavně ve Francii, dalo hodně práce myšlenku na něco takového strávit.“[3] Newton, jak už bylo řečeno

---

[1] srov. PICKOVER, Clifford. *Matematická kniha*. Praha: Dokořán, 2012. s. 152.
[2] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. Příbram: Pistorius, 2011. s. 169.
[3] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. Příbram: Pistorius, 2011. s. 170.

výše, také připravil nový matematický aparát, který potřeboval pro solidní formulaci svých fyzikálních teorií. Patřil k němu především diferenciální a integrální počet včetně teorie limit.[4]

„Za 350 let od Newtona došlo lidstvo k závěru, že všechny fyzikální zákony mají podobu diferenciálních rovnic. Platí to pro zákony šíření tepla či proudění vzduchu a vody nebo pro zákony elektřiny a magnetismu. Platí to i pro kontraintuitivní svět atomové fyziky, kde vládne kvantová mechanika. Ve všech případech vedou problémky teoretické fyziky nakonec k nalezení diferenciální rovnice a jejího řešení.“[5]

Leibniz zveřejnil svůj objev diferenciálního počtu v roce 1684 a s integrálním počtem přišel o dva roky později. Newton byl pobouřen, že si Leibniz objev kalkulu přivlastnil. „Řadu let pak zuřily spory o zásluhy za objev kalkulu, což pokrok v této disciplíně značně zdržovalo. Newton byl první, kdo uplatil kalkulus na fyzikální problémy, Leibniz zase vypracoval velkou část notace, kterou používá i moderní matematická literatura.“[6] Tyto spory definitivně skončily až Leibnizovou smrtní roku 1716.

Je dobré položit si otázku, proč Newton nepublikoval své poznatky z oblasti kalkulu dříve, vzhledem k tomu, že většinu nejdůležitějších poznatků objevil už v letech 1665-1666. Většina historiků se domnívá, že za to mohla Newtonova vlastní povaha. Newton byl totiž neobyčejně introvertní, tajnůstkářský a trpěl chorobným strachem z možné kritiky.[7]

„Infinitezimální počet pronikl do každé oblasti vědeckého bádání a dnes hraje neocenitelnou roli v biologii, fyzice, chemii, ekonomii, sociologii, projektování a ve všech disciplínách, kde nějaká veličina, například rychlost nebo teplota, prochází neustálými změnami. Kalkulus nám může pomoci k objasnění struktury duhy, učí nás, jak lze vydělat více peněz na akciovém trhu, řídit kosmickou loď, předpovídat počasí, předvídat růst populace, navrhovat stavby nebo analyzovat šíření přenosných chorob. Kalkulus přinesl revoluci. Změnil způsob, jakým se dnes díváme na svět.“[8]

---

[4] srov. MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. Příbram: Pistorius, 2011. s. 169-170; srov. PICKOVER, Clifford. *Matematická kniha*. Praha: Dokořán, 2012. s. 152.
[5] STROGATZ, Steven. *Radost z x*. Praha: Dokořán, 2014. s. 143.
[6] PICKOVER, Clifford. *Matematická kniha*. Praha: Dokořán, 2012. s. 152.
[7] srov. ACHESON, David. *The Calculus Story*. Kindle vyd. New York: Oxford, 2017. s. 96.
[8] PICKOVER, Clifford. *Matematická kniha*. Praha: Dokořán, 2012. s. 152.

Newton a Leibniz vypracovali teorii kalkulu a bratři Jacob a Johann Bernoulliové jej zdokonalili, ale až francouzský matematik Marquis de l'Hôpital (1661-1704) vydal v roce 1696 první učebnici kalkulu pod názvem *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des linges courbes* (Analýza nekonečně malého za účelem pochopení křivek). Jejím cílem bylo rozšířit pochopení infinitezimálního počtu. Keith Devlin k tomu píše: „Až do vydání l'Hôpitalovy knihy byli Newton, Leibniz a oba Bernoulliové vlastně jedinými lidmi na Zemi, kteří o kalkulu něco podstatného věděli." Vedle své učebnice je l'Hôpital známý pravidlem pro výpočet limitní hodnoty zlomku, jehož čitatel i jmenovatel se oba blíží buď k nule nebo k nekonečnu.[9]

Dalším průkopníkem v oblasti kalkulu byl francouzský matematik Augustin Louis Cauchy (1789-1857). „Americký matematik William Waterhouse napsal: „Kalkulus se v roce 1800 nacházel v kuriózní situaci. Všichni byli přesvědčeni, že je bezchybný. Matematici sdostatek obratní a bystří jej s úspěchem používali už celé století. Nikdo ale nedokázal jasně vysvětlit, proč vlastně funguje… Až přišel Cauchy." Ve své práci *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (Shrnutí lekcí z infinitezimálního počtu) z roku 1823 přichází plodný francouzský matematik Augustin Cauchy s důkladným rozvinutím kalkulu a moderním důkazem jeho základní věty, která elegantně spojuje dvě hlavní větve kalkulu (diferenciální a integrální počet) do jednoho rámce. (…) „Cauchy vlastně žádné základy nepoložil; smetl jen všechen prach, aby odkryl v celé své nádheře stavbu kalkulu, která stála na pevných základech už od počátku, " uzavírá Waterhouse."[10]

[9] srov. PICKOVER, Clifford. *Matematická kniha*. Praha: Dokořán, 2012. s. 160.
[10] PICKOVER, Clifford. *Matematická kniha*. Praha: Dokořán, 2012. s. 220.

2 Hyperbolické funkce

V této kapitole jsem vycházel především ze článku zveřejněném na *Wikipedii*.[11]

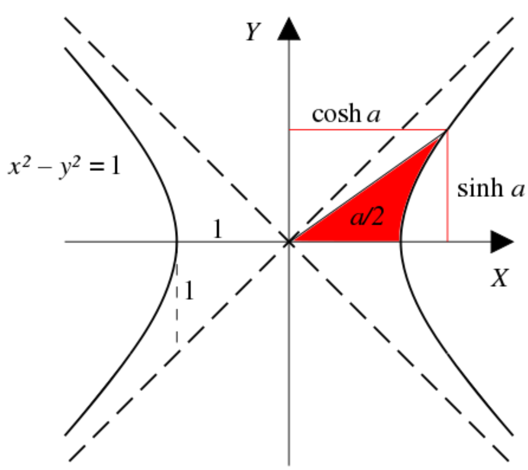
Jako hyperbolické funkce se označuje skupina funkcí analogicky podobných k funkcím goniometrickým. My tyto funkce budeme využívat pro řešení některých integrálů. Základní dvě funkce jsou hyperbolický sinus ($\sinh x$) a hyperbolický kosinus ($\cosh x$). Podobně jako u goniometrických funkcí z nich můžeme odvodit ostatní, tedy hyperbolický tangens ($\tanh x$), kosekans ($\operatorname{csch} x$), sekans ($\operatorname{sech} x$) a kotangens ($\coth x$).

Funkce inverzní k těmto funkcím nazýváme hyperbolometrické a budeme se o nich bavit ve druhé kapitole.

2.1 Spojitost s hyperbolou

Podobně jako lze definovat goniometrické funkce pomocí jednotkové kružnice, tak hyperbolické funkce lze definovat pomocí jednotkové hyperboly.

Přímka vedená z počátku protíná hyperbolu $x^2 - y^2 = 1$ v bodě $[\cosh(a), \sinh(a)]$, kde a je dvojnásobek plochy vymezené přímkou, hyperbolou a osou x. Pro body hyperboly pod osou x je plocha brána jako záporná.



Obrázek 2.1: *Geometrický význam hyperbolických funkcí.*[12]

[11] Hyperbolic functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions
[12] Hyperbolic functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions

2.2 Definice hyperbolických funkcí

2.2.1 Definice pomocí Eulerova čísla

Hyperbolické funkce jsou standardně definovány pomocí Eulerova čísla následovně:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

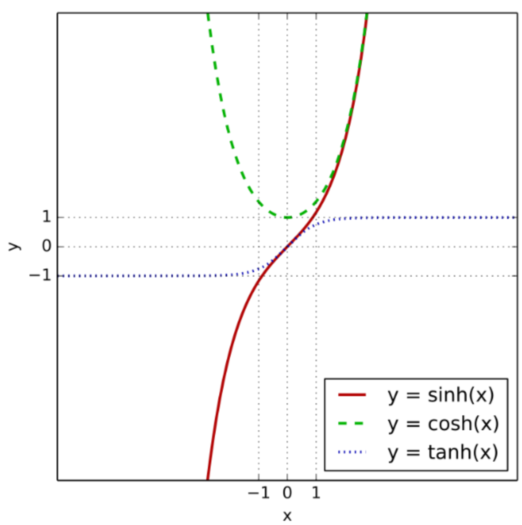
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

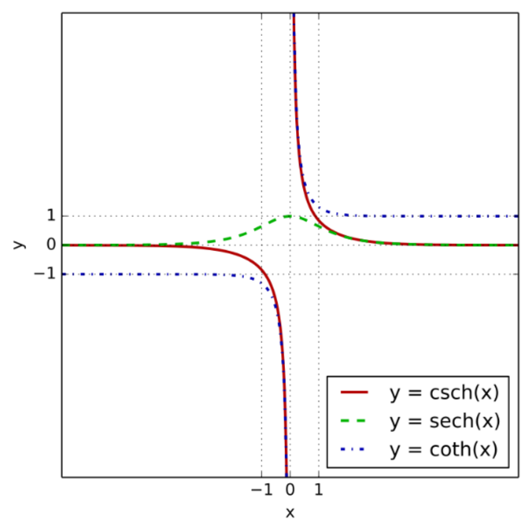
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0,$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \neq 0.$$





Obrázek 2.2: *Grafy funkcí sinh, cosh, tanh.*[13]

Obrázek 2.3: *Grafy funkcí csch, sech, coth.*[14]

[13] Hyperbolic functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions

[14] Hyperbolic functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions

2.2.2 Definice pomocí komplexních čísel

Hyperbolické funkce také můžeme definovat pomocí komplexních čísel. Vyjdeme z Eulerova vzorce:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Nyní do vzorce dosadíme úhel $-\theta$:

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta).$$

Po odečtení druhé rovnice od první dostaneme:

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta).$$

Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $-i/2$:

$$\sin(\theta) = -i\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

Takže:

$$\sin(ix) = -i\frac{e^{i^2x} - e^{-i^2x}}{2} = -i\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = i\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i\sinh(x).$$

Pokud bychom tyto dvě rovnice naopak sečetli, tak bychom dostali:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

Takže:

$$\cos(ix) = \frac{e^{i^2x} + e^{-i^2x}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh(x).$$

Z těchto dvou vztahů lze snadno odvodit definice ostatních hyperbolických funkcí.

2.3 Vlastnosti hyperbolických funkcí

Hyperbolický kosinus a sekans jsou sudé funkce, zatímco ostatní hyperbolické funkce jsou liché. Vztah mezi hyperbolickým sinem a kosinem je:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x,$$

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}.$$

2.3.1 Osbornovo pravidlo

V tomto oddílu jsem vycházel ze dvou článků, zveřejněných na webech *Stackexchange*[15] a *Undergroundmathematics*.[16]

Osbornovo pravidlo je pravidlem pro převod goniometrické identity na odpovídající hyperbolickou. Pravidlo říká, že každý výskyt sinu nebo kosinu nahradíme odpovídajícím hyperbolickým sinem nebo kosinem, a kdekoli máme součin dvou sinů, tak součin hyperbolických sinů musíme znegovat.

Abychom toto pravidlo mohli spolehlivě použít, tak nejprve musíme zapsat funkce tangens, kosekans, sekans a kotangens v rámci funkcí sinus a kosinus. Toto pravidlo neplatí pro identity zahrnující derivace a integrály. Níže je uvedeno několik příkladů použití.

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \;\Rightarrow\; \sinh(2\theta) = 2\sinh(\theta)\cosh(\theta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \cosh(\alpha + \beta) = \cosh(\alpha)\cosh(\beta) + \sinh(\alpha)\sinh(\beta)$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \Rightarrow \cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \Rightarrow \cosh^2(\theta) = 1 + \sinh^2(\theta)$$

$$\sec^2(\theta) - \tan^2(\theta) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\theta)} - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = 1 \Rightarrow \mathrm{sech}^2(\theta) + \tanh^2(\theta) = 1$$

[15] Proof of Osborn's rule. *Stackexchange* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/138842/proof-of-osborns-rule

[16] Osborn's rule. *Undergroundmathematics* [online]. [cit. 2021-11-07]. Dostupné z: https://undergroundmathematics.org/glossary/osborns-rule

$$\csc^2(\theta) - \mathrm{cotg}^2(\theta) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2(\theta)} - \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = 1 \Rightarrow \coth^2(\theta) = 1 + \mathrm{csch}^2(\theta)$$

Je vidět, jak Osbornovo pravidlo funguje, naznačíme si proč. Vyjdeme z výše dokázaných vztahů mezi hyperbolickými funkcemi a goniometrickými funkcemi komplexního úhlu: $\sin(ix) = i\sinh(x)$, $\cos(ix) = \cosh(x)$. Libovolnou goniometrickou identitu lze vyjádřit takto:

$$\mathrm{P}(\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(kx), \cos(kx)) = \mathrm{Q}(\sin(x), \cos(x)).$$

Kde P a Q jsou racionální funkce (funkce vyjádřené jako podíl dvou polynomů) a k je celé číslo. Nyní za úhel x dosadíme komplexní úhel ix a použijeme odvozené vztahy.

$$\mathrm{P}(\sin(ix), \cos(ix), \dots) = \mathrm{Q}(\sin(ix), \cos(ix))$$

$$\mathrm{P}(i\sinh(x), \cosh(x), \dots) = \mathrm{Q}(i\sinh(x), \cosh(x))$$

Pokud je v goniometrické identitě součin dvou sinů, tak v hyperbolické identitě bude součin dvou hyperbolických sinů a $i^2 = -1$, z čehož plyne výše zmíněná negace. Imaginární jednoty u lichých mocnin sinů se pokrátí. Tímto jsme si naznačili důkaz Osbornova pravidla.

2.3.2 Derivace hyperbolických funkcí

Derivaci hyperbolické funkce najdeme derivováním její definice.

$$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x),$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x),$$

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$= 1 - \tanh^2(x) = \mathrm{sech}^2(x),$$

$$\frac{d}{dx}\coth(x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$
$$= 1 - \coth^2(x) = -\mathrm{csch}^2(x), \qquad x \neq 0,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}(x) = \frac{d}{dx}\frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{0 - (e^x - e^{-x})2}{(e^x + e^{-x})^2} = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x),$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}(x) = \frac{d}{dx}\frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{0 - (e^x + e^{-x})2}{(e^x - e^{-x})^2} = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)\,, \qquad x \neq 0.$$

3 Hyperbolometrické funkce

V této kapitole jsem vycházel především ze článku zveřejněném na *Wikipedii*.[17]

Hyperbolometrické funkce jsou funkce inverzní k funkcím hyperbolickým. Běžně se používají dva druhy značení hyperbolometrických funkcí. Hyperbolometrický sinus:

$$\sinh^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x).$$

3.1 Definice hyperbolometrických funkcí

Vzhledem k tomu, že hyperbolické funkce jsou definované pomocí Eulerova čísla, tak můžeme poměrně snadno najít definice hyperbolometrických funkcí a vyjádřit je pomocí přirozeného logaritmu.

Zkusme si odvodit třeba hyperbolometrický sinus. Při řešení použijeme kvadratickou rovnici a poté si výsledek vyjádříme jako přirozený logaritmus jejího výsledku. Při odvození vzorce ostatních hyperbolometrických funkcí bychom postupovali stejně.

$$y = \sinh^{-1}(x) \Rightarrow x = \sinh(y)$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow 2x = e^y - e^{-y} \Rightarrow e^y - 2x - e^{-y} = 0 \Rightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^y_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}, \qquad e^y > 0 \text{ pro všechna } y$$

$$\Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = \sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Výraz $x + \sqrt{x^2 + 1}$ je kladný pro všechna x, takže definičním oborem $\sinh^{-1}(x)$ jsou všechna reálná čísla. Podobně se dají odvodit ostatní definice.

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \qquad x \geq 1$$

[17] Inverse hyperbolic functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_hyperbolic_functions

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad |x| < 1$$

$$\operatorname{csch}^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right), \qquad x \neq 0$$

$$\operatorname{sech}^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad |x| > 1$$

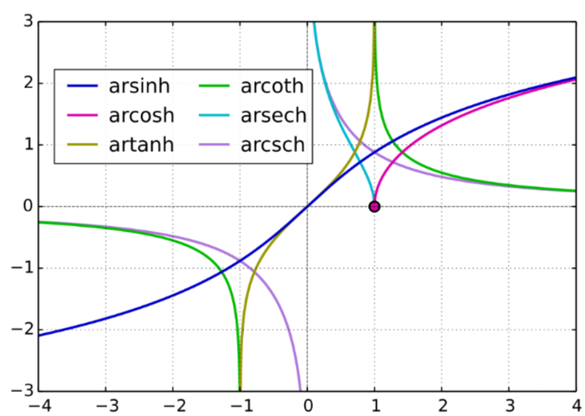
3.2 Vlastnosti hyperbolometrických funkcí

Hyperbolometrický kosinus a sekans nemají paritu, ostatní hyperbolometrické funkce jsou liché. Vztahy mezi hyperbolometrickými funkcemi jsou:

$$\operatorname{csch}^{-1}(x) = \sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\operatorname{sech}^{-1}(x) = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\coth^{-1}(x) = \tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right).$$



Obrázek 3.1: *Grafy hyperbolometrických funkcí.*[18]

[18] Inverse hyperbolic functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_hyperbolic_functions

3.2.1 Derivace hyperbolometrických funkcí

Derivaci hyperbolometrické funkce najdeme derivováním její definice.

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1-x}{2(1+x)} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+x^4}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-x^4}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\coth^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x-1}{2(x+1)} \cdot \frac{(x-1)-(1+x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Vzhledem k tomu, že $\operatorname{sech}^{-1}(x)$ je definovaný pouze pro $0 < x \leq 1$, tak můžeme absolutní hodnotu v jeho derivaci ignorovat. Tedy:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Také si můžeme všimnout, že platí vztahy:

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\coth^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1}(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}.$$

Důležité je uvědomit si, že tyto funkce mají různé definiční obory, což při integraci může být důležité.

4 Neurčitý integrál

V této kapitole jsem vycházel především ze článku zveřejněném na *Wikipedii*[19] a z bakalářské práce *Aplikace integrálů ve fyzice a technice*.[20] Většina matematických definic a vět v této kapitole je srovnaných s touto prací. Také jsem vycházel z kurzu *Calculus 2*, dostupného na webu *Blackpenredpen*,[21] ze kterého také pochází většina příkladů, zejména ze cvičení *Ultimate Integral Starter*[22] a *100 Integrals.*[23] Některé příklady pocházejí z *Petákové*[24] a z kurzu *Integrální počet*, dostupného na webu *Isibalo.*[25]

V této kapitole si definujeme primitivní funkci a pojem neurčitého integrálu. Poté se postupně zaměříme na všechny základní integrační metody. Na konci této práce je seznam vyřešených příkladů s výsledky. Pokud by se během řešení daného příkladu objevil integrál, který je vyřešený v nějakém jiném příkladu, pak se na tento příklad můžeme odkázat.

4.1 Primitivní funkce

Definice 1. *Primitivní funkce k funkci* f na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ je taková funkce F, že pro každé $x \in J$ je $F'(x) = f(x)$.

Věta 2. *Nechť je* f *spojitá funkce na intervalu* $J \subseteq \mathbb{R}$*. Pak k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní.*

Lemma 1. *Nechť je* F *primitivní funkcí k funkci* f *na intervalu* $J \subseteq \mathbb{R}$*. Pak z Definice 1 plyne, že pro libovolné* $c \in \mathbb{R}$ *je také funkce* $F + c$ *primitivní k* f *na* J.

[19] Primitivní funkce. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-11-09]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Primitivn%C3%AD_funkce
[20] BIEDNIAKOVA, Natalia. *Aplikace integrálů ve fyzice a technice* [online]. Brno, 2015 [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/z0ms3/Bakalarska_prace_Natalia_Biedniakova.pdf
[21] Calculus 2. *Blackpenredpen* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://www.blackpenredpen.com/calc2
[22] Ultimate Integral Starter. *Blackpenredpen* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://bit.ly/3K6hxlq
[23] 100 Integrals. *Blackpenredpen* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://bit.ly/3GmIvTB
[24] PETÁKOVÁ, Jindra. *MATEMATIKA*. Praha: Prometheus, 2018. Str. 162-165.
[25] Integrální počet (integrace). *Isibalo* [online]. [cit. 2021-12-19]. Dostupné z: https://isibalo.com/matematika/integralni-pocet-integrace

Věta 3. *Nechť je* F *nějaká primitivní funkce k funkci* f *na intervalu* $J \subseteq \mathbb{R}$. *Pak*

$$\{F + c\,;\ c \in \mathbb{R}\}$$

je množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu J.

Definice 4. Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *neurčitý integrál* z funkce f na J a značí se

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad x \in J.$$

Procesu hledání neurčitého integrálu se říká *integrace*. Symbol $\int$ se nazývá *integrační znak* a diferenciál dx označuje, podle které proměnné integrujeme, proměnnou x bychom tedy označili jako *integrační proměnnou*. Integrované funkci f říkáme *integrand* a konstantě c *integrační konstanta*.

Věta 5. *Nechť je funkce* F, *resp.* G *primitivní k funkci* f, *resp.* g *na intervalu* $J \subseteq \mathbb{R}$. *Pak z Definice 1 vyplývají vztahy:*

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x),$$

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \qquad a \in \mathbb{R},$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = F(x) \pm G(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4.2 Tabulkové integrály

Vzorce uvedené v tomto oddílu jsou srovnané se článkem zveřejněném na *Wikipedii*.[26]

Tabulkové integrály jsou vzorce vycházející z derivačních vzorců. Cílem všech integračních metod je zjednodušit složitější integrál na součet tabulkových integrálů. Uvedené vzorce budou v této práci hojně využívány.

[26] Seznam základních integrálů. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-12-21]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_z%C3%A1kladn%C3%ADch_integr%C3%A1l%C5%AF

Věta 6. *Platí vztahy:*

1. $\int 0 \, dx = c,$
2. $\int a \, dx = ax + c,$
3. $\int x^n \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,$ pro $x \in \begin{cases} \mathbb{R}^+, & \text{pro } n \in \mathbb{R}, \\ \mathbb{R}, & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$
4. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c,$ pro $x \neq 0,$
5. $\int e^x \, dx = e^x + c$
6. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$ pro $a > 0,$ $a \neq 1,$
7. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$
8. $\int \cos x \, dx = \sin x + c,$
9. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + c,$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$ $k \in \mathbb{N},$
10. $\int \csc^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$ pro $x \neq k\pi,$ $k \in \mathbb{N},$
11. $\int \sinh x \, dx = \cosh x + c,$
12. $\int \cosh x \, dx = \sinh x + c,$
13. $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c,$
14. $\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + c,$ pro $x \neq 0,$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c,$ pro $|x| < 1,$
16. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c,$
17. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sinh^{-1}(x) + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c,$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c, & \text{pro } |x| > 1, \\ \cosh^{-1}(x) + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c, & \text{pro } x > 1, \end{cases}$

$$19.\ \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c, & \text{pro } |x| \neq 1, \\ \tanh^{-1}(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c, & \text{pro } |x| < 1, \\ \coth^{-1}(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + c, & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$$

Důkaz: Platnost těchto vztahů se snadno ověří derivováním pravých stran rovností.

4.3 Neelementární integrály

Definice 7. Funkce f je *elementární*, pokud ji lze definovat sečtením, násobením a složením konečného množství *exponenciálách*, *racionálních*, *goniometrických* a *hyperbolických* funkcí a *funkcí k nim inverzních*.[27]

Definice 8. Nechť F je nějaká primitivní funkce k elementární funkci f na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Pokud funkce F není elementární, pak nazýváme neurčitý integrál funkce f *neelementárním*.[28]

Věta 9. *Platí, že tyto integrály jsou neelementární:*

1. $\int e^{x^2}\,dx,\ \int e^{-x^2}\,dx,\ \int e^{e^x}\,dx,\ \int \frac{e^x}{x}dx,\ \int \frac{e^{-x}}{x}dx,\ \int x^x\,dx,$
2. $\int \frac{1}{\ln x}dx,\ \int \ln(\ln x)\,dx,\ \int \ln x \cos x\,dx,$
3. $\int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \sin(x^2)\,dx,\ \int \cos(x^2)\,dx,$
4. $\int \sqrt{1+x^3}\,dx,\ \int \sqrt{1-x^4}\,dx,$
5. $\int x^{n-1}e^{-x}\,dx,$ pro $n \notin \mathbb{N}$.[29]

[27] srov. Elementary function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_function
[28] srov. Nonelementary integral. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Nonelementary_integral
[29] srov. Nonelementary integral. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Nonelementary_integral

4.4 Integrály upravitelné na tabulkové integrály

Cílem je upravit integrand tak, aby bylo možné použít tabulkové integrály.

Příklad 1. Upravení racionální funkce.

$$\int \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^3 - 2x^4} dx = \int \frac{(x-2)^2}{-2x^3(x-2)} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{x-2}{x^3} dx = -\frac{1}{2}\int x^{-2}\, dx + \int x^{-3}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + c = \boldsymbol{\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + c}$$

Příklady 2, 3. Upravení integrandu pomocí základních goniometrických vzorců.

$$\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \boldsymbol{\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + c}$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1\, dx = \boldsymbol{\operatorname{tg} x - x + c}$$

Příklady 4, 5. Snížení mocniny sinu a kosinu. Výchozí vzorec: $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\int 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int (1 - \cos x)\, dx = \boldsymbol{x - \sin x + c}$$

$$\int 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int 2(1 + \cos x)\, dx = \boldsymbol{2x + 2\sin x + c}$$

Příklad 6. Nestandardní využití vzorců pro snížení mocniny sinu a kosinu.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \Rightarrow 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int \left(\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)-1\right)dx$$

$$= \mathbf{2\tan\left(\frac{\boldsymbol{x}}{2}\right) - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}}$$

Příklad 7.

$$\int \frac{3^{x+1}+9\left(\frac{9}{2}\right)^{x-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^x}\,dx = \int \frac{3\cdot 3^x + 2\left(\frac{9}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x}\,dx = \int \frac{3\cdot 6^x + 2\cdot 9^x}{3^x}\,dx$$

$$= \int (3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x)\,dx = \mathbf{3\cdot\frac{2^{\boldsymbol{x}}}{\ln 2} + 2\cdot\frac{3^{\boldsymbol{x}}}{\ln 3} + \boldsymbol{c}}$$

Příklad 8. Složitě vypadající integrand s hezkou úpravou.

$$\int x^{\frac{x}{\ln x}}\,dx = \int \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}dx = \int e^x\,dx = \boldsymbol{e^x + c = x^{\frac{x}{\ln x}} + c}$$

Příklad 9. Úprava výrazu pod odmocninou.

$$\int \sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}\,dx = \int \sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}\,dx$$

$$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx = \int \left(x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \mathbf{\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2 + \frac{1}{4}\ln|\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{c}}$$

4.5 Integrace uhádnutím primitivní funkce

Někdy je možné (a pokud to jde, tak většinou i nejjednodušší) uhádnout primitivní funkci integrandu, aniž bychom museli použít nějakou integrační metodu. Kromě tabulkových integrálů se také můžeme zaměřit na integrandy ve tvaru derivace součinu a podílu. Stačí nám najít funkci, jejíž derivace je integrand.

$$\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\, dx = f(x)g(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$$

Příklad 10. Využití vzorce pro derivaci součinu.

$$\int \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x\right) dx = \int [\ln' x \sin x + \ln x \sin' x]\, dx = \mathbf{\ln \boldsymbol{x} \sin \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}}$$

Příklad 11. Využití vzorce pro derivaci podílu.

$$\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\, dx$$

Ve jmenovateli integrandu je druhá mocnina, zkusím, zda nejde o derivaci podílu. První funkce tedy je $(1+2x)$. V čitateli je výraz e^{2x}, zkusím jej použít jako druhou funkci:

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{2x}}{1+2x} = \frac{2e^{2x}(1+2x) - e^{2x}2}{(1+2x)^2} = \frac{2e^{2x}(1+2x-1)}{(1+2x)^2} = \frac{4xe^{2x}}{(1+2x)^2}.$$

Což je čtyřnásobek našeho integrandu, takže:

$$\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\, dx = \boldsymbol{\frac{e^{2x}}{4(1+2x)} + c}.$$

4.6 Integrace metodou per partes

V tomto a v následujícím oddílu jsem vycházel především z kurzu *Calculus 2*, který je dostupný na webu *Blackpenredpen*.[30]

Integrace per partes (po částech) se používá převážně pro integraci součinu dvou funkcí. Pokud je integrand pouze jedna funkce, pak jej můžeme vnímat jako tuto funkci vynásobenou konstantní funkcí jedna.

Věta 10. *Nechť jsou u, v funkce proměnné x a nechť mají spojité derivace na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Potom na J platí:*

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

Důkaz. Vyjdeme z věty o derivaci součinu:

$$[uv]' = u'v + uv' \Rightarrow uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx \Rightarrow \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

Cílem integrace per partes je převést složitější integrál $\int uv'\,dx$ na jednodušší integrál ve tvaru $\int u'v\,dx$. Věta 10 se také často zapisuje pomocí diferenciálů jako

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

V této práci bude používán tento tvar.

V per partes je zásadní si správně vybrat, kterou funkci budeme derivovat a kterou integrovat. Při řešení většiny jednoduchých příkladů na per partes se můžeme řídit metodou LIATE, která nám pomáhá s výběrem funkce, kterou budeme derivovat. Čím blíž je funkce k písmenu L, tím větší má prioritu. Takže například ve většině případů budeme chtít derivovat logaritmus. Následuje seznam funkcí seřazených podle priority pro derivaci.

1. L = Logaritmická funkce
2. I = Inverzní goniometrická funkce

[30] Calculus 2. *Blackpenredpen* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://www.blackpenredpen.com/calc2

3. A = Algebraická funkce (racionální funkce, která může obsahovat odmocniny)

4. T = Trigonometrická (goniometrická) funkce

5. E = Exponenciální funkce

Příklad 12. Nejdříve si musíme zvolit, kterou funkci budeme derivovat a kterou integrovat. V tomto příkladu se budeme řídit metodou LIATE. Pro derivaci máme na výběr ze dvou funkcí, z funkce x (aritmetická funkce) a funkce $\cos x$ (trigonometrická funkce). LIATE nám radí abychom derivovali funkci x. Takže budeme derivovat funkci $u = x$ a integrovat funkci $dv = \cos(x)$. Tyto funkce si zapíšeme do tabulky. Výsledek je součin diagonály mínus integrál součinu spodní řady.

$$\int x \cos x \, dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \cos x \, dx \\ du = dx & v = \sin x \end{vmatrix} = uv - \int v \, du = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= \boldsymbol{x \sin x + \cos x + c}$$

Příklad 13. Integrál $\ln x$ neznáme, tak si jej zvolíme jako funkci, kterou budeme derivovat.

$$\int x^3 \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = x^3 \, dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \int \frac{x^4}{4x} dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + c}$$

Příklad 14. Výraz $\ln x$ můžeme brát jako $1 \cdot \ln x$.

$$\int \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{vmatrix} = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = \boldsymbol{x \ln x - x + c}$$

Příklad 15. Opakované použití per partes. Pro zjednodušení zápisu budeme do tabulky zapisovat pouze funkce, které derivujeme, resp. integrujeme a označíme si sloupeček, ve kterém derivujeme, resp. integrujeme D, resp. I. V tomto příkladě záměrně nebudeme vytýkat konstanty, abychom si ukázali, proč funguje rychlá metoda per partes, o které pojednává další oddíl.

$$\int x^3 \sin x\, dx = \begin{vmatrix} D & I \\ x^3 & \sin x \\ 3x^2 & -\cos x \end{vmatrix} = +(-x^3 \cos x) - \int 3x^2(-\cos x)\, dx = \begin{vmatrix} D & I \\ 3x^2 & -\cos x \\ 6x & -\sin x \end{vmatrix}$$

$$= +(-x^3 \cos x) - (-3x^2 \sin x) + \int 6x(-\sin x)\, dx = \begin{vmatrix} D & I \\ 6x & -\sin x \\ 6 & \cos x \end{vmatrix}$$

$$= +(-x^3 \cos x) - (-3x^2 \sin x) + (6x \cos x) - \int 6 \cos x\, dx = \begin{vmatrix} D & I \\ 6 & \cos x \\ 0 & \sin x \end{vmatrix}$$

$$= +(-x^3 \cos x) - (-3x^2 \sin x) + (6x \cos x) - (6 \sin x) + \int 0\, dx$$

$$= +(-x^3 \cos x) - (-3x^2 \sin x) + (6x \cos x) - (6 \sin x) + c$$

$$= \boldsymbol{-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + c}$$

4.7 Rychlá metoda per partes (DI metoda)

Je vidět, že opětovné používání per partes může být velmi zdlouhavé. Všimněme si, že při použití per partes získáme nějakou novou funkci (uv) a nový integrál ($\int u'v\, dx$). Tuto novou funkci, resp. integrál přičítáme, resp. odečítáme, což znamená, že pokud znovu použijeme per partes (na náš nově vzniklý integrál), tak budeme novou funkci, resp. integrál odečítat, resp. přičítat atd. Znaménka se nám tedy střídají. Toto je například pro trojnásobné použití per partes možné zapsat tímto způsobem:

$$\int uv'''\, dx = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & u & \searrow & v''' \\ - & u' & \searrow & v'' \\ + & u'' & \searrow & v' \\ - & u''' & \rightarrow & v \end{vmatrix} = +uv'' - u'v' + u''v - \int u'''v\ dx.$$

Výsledek je součet součinů diagonál vynásobených daným znaménkem a integrálu součinu spodní řady.

Takto bychom mohli používat per partes do nekonečna a vytvářet další řady tabulky, takže je důležité vědět, kdy přestat a vypočítat nově získaný integrál. Jsou tři situace, ve kterých chceme přestat.

4.7.1 Ve sloupečku Derivace je nula

Pokud je ve sloupečku Derivace nula, pak náš nově získaný integrál je $\int 0\,dx = c$, takže další uplatňování per partes nedává smysl. Z posledního řádku získáme integrační konstantu, takže není nutné psát nový integrál.

Příklad 15. Jiné řešení pomocí DI metody.

$$\int x^3 \sin x\,dx = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & x^3 & \searrow & \sin x \\ - & 3x^2 & \searrow & -\cos x \\ + & 6x & \searrow & -\sin x \\ - & 6 & \searrow & \cos x \\ + & 0 & \rightarrow & \sin x \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \cos x + c}$$

Příklad 16. V tomto příkladu použijeme výsledek z Příkladu 53:

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c.$$

Poznámka: $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \operatorname{tg} x$.

$$\int x \sec x \tan x\,dx = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & x & \searrow & \sec x \tan x \\ - & 1 & \searrow & \sec x \\ + & 0 & \rightarrow & \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| \end{vmatrix} = \boldsymbol{x \sec x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c}$$

Příklad 17.

$$\int x^2 e^x\,dx = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & x^2 & \searrow & e^x \\ - & 2x & \searrow & e^x \\ + & 2 & \searrow & e^x \\ - & 0 & \rightarrow & e^x \end{vmatrix} = \boldsymbol{x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c}$$

4.7.2 Je možné najít integrál součinu řady

Pokud umíme najít primitivní funkci k součinu nějaké řady v tabulce, pak můžeme přestat a vyřešit tento nový integrál. Někdy taky využijeme toho, že k primitivní funkci můžeme přičíst libovolnou konstantu, čímž získáme nějakou novou primitivní funkci.

Příklad 18. V tomto příkladu použijeme výsledek z příkladu 14:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c.$$

$$\int \ln^2(x)\, dx = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & \ln^2(x) & \searrow & 1 \\ - & \dfrac{2\ln x}{x} & \rightarrow & x \end{array} \right| = x\ln^2(x) - 2\int \ln x \, dx$$

$$= \boldsymbol{x\ln^2(x) - 2x\ln x + 2x + c}$$

Příklad 19. V tomto příkladu použijeme výsledek z Příkladu 26:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & \operatorname{arctg} x & \searrow & 1 \\ - & \dfrac{1}{1+x^2} & \rightarrow & x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \boldsymbol{x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c}$$

Příklad 20.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & \operatorname{arctg} x & \searrow & x \\ - & \dfrac{1}{1+x^2} & \rightarrow & \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + c = \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + c}$$

Příklad 20. Jiné řešení pomocí jiné primitivní funkce.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & \operatorname{arctg} x & \searrow & x \\ - & \dfrac{1}{1+x^2} & \rightarrow & \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{1+x^2} \frac{x^2+1}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1) \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2} \, dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2+1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + c}$$

Příklad 21.

$$\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) dx = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) & \searrow & 1 \\ - & \dfrac{1}{1+(x+1)} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & \rightarrow & x \end{array} \right|$$

$$= x \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) - \int \frac{x}{(x+2)2\sqrt{x+1}} \, dx$$

Náš nový integrál je poměrně složitý, tak si zkusíme zvolit nějakou jinou primitivní funkci.

$$\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) dx = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) & \searrow & 1 \\ - & \dfrac{1}{1+(x+1)} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & \rightarrow & x+a \end{array} \right|$$

$$= (x+a) \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) - \int \frac{x+a}{(x+2)2\sqrt{x+1}} \, dx =$$

Konstantu a položíme rovnou dvěma, čímž se nám zjednoduší integrand.

$$= (x+2) \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) - \int \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \, dx$$

$$= \boldsymbol{(x+2) \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) - \sqrt{x+1} + c}$$

Příklad 22. V tomto příkladu použijeme výsledek z Příkladu 36:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2} + c.$$

$$\int \sinh^{-1} x\,dx = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & \sinh^{-1} x & \searrow & 1 \\ - & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \rightarrow & x \end{vmatrix} = x\sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \boldsymbol{x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + c}$$

4.7.3 První řada tabulky se opakuje

Pokud je nějaká řada tabulky násobkem první řady, pak můžeme přestat a náš nový integrál bude násobkem našeho původního integrálu. K tomuto zacyklení dochází např. pokud integrujeme součin exponenciální a goniometrické funkce.

Příklad 23. Třetí řada je mínus čtyřnásobek první řady.

$$\int e^x \sin(2x)\,dx = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & \sin(2x) & \searrow & e^x \\ - & 2\cos(2x) & \searrow & e^x \\ + & -4\sin(2x) & \rightarrow & e^x \end{vmatrix}$$

$$= e^x \sin(2x) - 2e^x\cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)\,dx$$

$$\Rightarrow 5\int e^x \sin(2x)\,dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin(2x)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{5}e^x \sin(2x) - \frac{2}{5}e^x\cos(2x) + c}$$

Příklad 24. Složitější příklad na zacyklení.

$$\int 2e^x x\sin x\,dx = \left|\begin{array}{lccc} & D & & I \\ + & x\sin x & \searrow & 2e^x \\ - & \sin x + x\cos x & \searrow & 2e^x \\ + & \cos x + \cos x - x\sin x & \rightarrow & 2e^x \end{array}\right|$$

$$= 2e^x x\sin x - 2e^x(\sin x + x\cos x) + \int 2e^x(2\cos x - x\sin x)\,dx$$

$$= 2e^x x\sin x - 2e^x(\sin x + x\cos x) + \int 4e^x\cos x\,dx - \int 2e^x x\sin x\,dx$$

Máme tedy rovnici:

$$2\int 2e^x x\sin x\,dx = 2e^x x\sin x - 2e^x(\sin x + x\cos x) + \int 4e^x\cos x\,dx.$$

$$\Rightarrow \int 2e^x x\sin x\,dx = e^x x\sin x - e^x(\sin x + x\cos x) + \int 2e^x\cos x\,dx.$$

Vyřešíme potřebný integrál.

$$\int 2e^x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{lccc} & D & & I \\ + & \cos x & \searrow & 2e^x \\ - & -\sin x & \searrow & 2e^x \\ + & -\cos x & \rightarrow & 2e^x \end{array}\right| = 2e^x\cos x + 2e^x\sin x - \int 2e^x\cos x\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int 2e^x\cos x\,dx = 2e^x\cos x + 2e^x\sin x \Rightarrow \int 2e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + e^x\sin x + c$$

A dořešíme původní integrál.

$$\Rightarrow \int 2e^x x\sin x\,dx = e^x x\sin x - e^x(\sin x + x\cos x) + e^x\cos x + e^x\sin x + c$$

$$\Rightarrow \int 2e^x x\sin x\,dx = \boldsymbol{e^x x\sin x - e^x x\cos x + e^x\cos x + c}$$

4.7.4 Odvození rekurentních vzorců pro integraci

Pomocí metody per partes je možné odvodit rekurentní vzorce pro určité integrály. Například integrál n-té mocniny dané goniometrické funkce. Tyto vzorce jsou užitečné při řešení velmi složitých integrálů.

Příklad 25. Odvození rekurentního vzorce pro snížení mocniny funkce sekans.

$$n \geq 2\colon \int \sec^{\mathrm{n}}(x)\,dx = \int \sec^{\mathrm{n-2}}(x)\sec^2(x)\,dx$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} & D & & I \\ + & \sec^{\mathrm{n-2}}(x) & \searrow & \sec^2(x) \\ - & (n-2)\sec^{\mathrm{n-3}}(x)\sec(x)\,\mathrm{tg}(x) & \rightarrow & \mathrm{tg}(x) \end{array} \right|$$

$$= \mathrm{tg}(x)\sec^{\mathrm{n-2}}(x) - (n-2)\int \sec^{\mathrm{n-2}}(x)\,\mathrm{tg}^2(x)\,dx$$

$$= \mathrm{tg}(x)\sec^{\mathrm{n-2}}(x) - (n-2)\int \sec^{\mathrm{n-2}}(x)\,(\sec^2(x)-1)\,dx$$

$$= \mathrm{tg}(x)\sec^{\mathrm{n-2}}(x) - (n-2)\int \sec^{\mathrm{n}}(x)\,dx + (n-2)\int \sec^{\mathrm{n-2}}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow (n-1)\int \sec^{\mathrm{n}}(x)\,dx = \mathrm{tg}(x)\sec^{\mathrm{n-2}}(x) + (n-2)\int \sec^{\mathrm{n-2}}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \sec^{\mathrm{n}}(x)\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{n-1}\mathrm{tg}(x)\sec^{\mathrm{n-2}}(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{\mathrm{n-2}}(x)\,dx}$$

4.8 Integrace metodou substituce za funkci

Při řešení integrálu metodou substituce zavádíme novou proměnnou. Cílem je převést složitější integrál jedné proměnné na jednodušší integrál jiné proměnné. Existují dva druhy substituce, můžeme buď substituovat za funkci, která se vyskytuje v integrandu nebo do integrandu substituovat nějakou novou funkci.

Věta 11. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a funkce $h(x)$ má spojitou derivaci na J a funkce $g(u)$ je spojitá pro všechna $u = h(x), x \in J$ a nechť je možné vyjádřit funkci $f(x)$ na intervalu J jako $f(x) = g\big(h(x)\big)h'(x)$. Potom pro všechna $x \in J$ platí:*

$$\int f(x)\,dx = \int g\big(h(x)\big)h'(x)\,dx = \int g(u)\,du.$$

Důkaz: Z předpokladu, že funkce $f(x)$, resp. $g(u)$ je spojitá funkce pro všechna $x \in J$, plyne, že na intervalu J existuje funkce $F(x)$ primitivní k $f(x)$, resp. $G(u)$ primitivní k $g(u)$. Dále z předpokladu plyne, že $u = h(x)$ a $f(x) = g\big(h(x)\big)h'(x)$, tedy:

$$\int g(u)\,du = G(u) + c = G\big(h(x)\big) + c$$

$$\frac{d}{dx}G\big(h(x)\big) = g\big(h(x)\big)h'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = G\big(h(x)\big) + c = \int g(u)\,du.$$

Tím máme tvrzení dokázané.

4.8.1 Substituce za mocninnou funkci

Používáme substituci:

$$\int x^n \cdot f(x^{n+1})\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^{n+1} \\ du = (n+1)x^n dx \end{matrix} \quad dx = \frac{1}{(n+1)x^n}du \right| = \frac{1}{n+1}\int f(u)\,du.$$

Příklad 26. Na konci řešení využijeme skutečnosti, že výraz $1 + x^2$ je vždy kladný.

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} u = 1 + x^2 \\ du = 2x\,dx \end{matrix} \quad dx = \frac{1}{2x}du \right| = \int \frac{x}{u}\cdot\frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c}$$

Příklad 27.

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \left|\begin{matrix} u = 1+x^4 \\ du = 4x^3\,dx \end{matrix} \quad dx = \frac{1}{4x^3}du\right| = \int \frac{1}{4u}\,du = \frac{1}{4}\ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{4}\ln|1+x^4| + c = \mathbf{\frac{1}{4}\ln(1+\boldsymbol{x}^4) + \boldsymbol{c}}$$

Příklad 28.

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{x}{1+(x^2)^2}\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{matrix} \quad dx = \frac{1}{2x}du\right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + c = \mathbf{\frac{1}{2}\operatorname{\mathbf{arctg}}(\boldsymbol{x}^2) + \boldsymbol{c}}$$

Příklad 29. Substituci za lineární funkci můžeme provést vždy, protože derivace lineární funkce je konstanta.

$$\int \frac{1}{(5x-2)^4}\,dx = \left|\begin{matrix} u = 5x-2 \\ du = 5\,dx \end{matrix} \quad dx = \frac{1}{5}du\right| = \frac{1}{5}\int u^{-4}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + c$$
$$= -\mathbf{\frac{1}{15(5\boldsymbol{x}-2)^3} + \boldsymbol{c}}$$

Věta 12. *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Pak z Definice 1 plyne, že platí:*

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme substitucí.

$$\int f(ax+b)\,dx = \left|\begin{matrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{matrix} \quad dx = \frac{1}{a}du\right| = \frac{1}{a}\int f(u)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

Příklady 29–31. Lineární substituce můžeme přeskočit a výsledek vyjádřit podle Věty 12.

$$\int \frac{1}{(5x-2)^4}\,dx = \int (5x-2)^{-4}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(5x-2)^{-3}}{-3} + c = -\mathbf{\frac{1}{15(5\boldsymbol{x}-2)^3} + \boldsymbol{c}}$$

$$\int \cos(3x-2)\,dx = \mathbf{\frac{1}{3}\sin(3\boldsymbol{x}-2) + \boldsymbol{c}}$$

$$\int \frac{1}{1-5x}\,dx = -\int \frac{1}{5x-1}\,dx = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\mathbf{ln}|\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{1}| + \boldsymbol{c}$$

Příklad 32. Nekonečný integrál.

$$\int \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}\,dx$$

Integrand si definujeme jako funkci proměnné x a pokusíme se jej zjednodušit.

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}} = \sqrt{x+f(x)}$$

$$\Rightarrow f^2(x) = x + f(x) \Rightarrow f^2(x) - f(x) - x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$$

Funkce $f(x)$ je odmocnina z nějakého výrazu, takže v oboru reálných čísel nemůže nabývat záporných hodnot. Uzavřená forma funkce $f(x)$ tedy je:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4x}\right).$$

$$\int \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4x}\right)dx = \frac{1}{2}\int \left(1+(4x+1)^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}\sqrt{(\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}}} + \boldsymbol{c}$$

Příklady 33, 34. Integrál racionální funkce vyžadující rozšíření zlomku.

$$\int \frac{1}{x^4+x}\,dx = \int \frac{x^{-4}}{1+x^{-3}}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = 1+x^{-3} \\ du = -3x^{-4}dx \\ dx = -\frac{1}{3}x^4 du \end{array} \right| = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{3}\ln\left|1+\frac{1}{x^3}\right| + c$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| + c = -\frac{1}{3}(\ln|x^3+1| - \ln|x^3|) + c$$

$$= -\frac{1}{3}(\ln|x^3+1| - 3\ln|x|) + c = \mathbf{ln}|\boldsymbol{x}| - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{ln}\left|\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{1}\right| + \boldsymbol{c}$$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{x^{-3}}{1+x^{-2}}\,dx = \left| \begin{matrix} u = 1+x^{-2} \\ du = -2x^{-3}dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x^2}\right| + c = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2}\right| + c$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln|x^2+1| - \ln|x^2|) + c = \mathbf{\ln|\boldsymbol{x}| - \frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{x}^2+1) + \boldsymbol{c}}$$

Příklad 35.

$$\int 4x^3\sec^2(x^4)\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^4 \\ du = 4x^3dx \end{matrix} \right| = \int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + c = \mathbf{tg}(\boldsymbol{x}^4) + \boldsymbol{c}$$

Příklad 36.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left| \begin{matrix} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^2} + \boldsymbol{c}$$

Příklad 37. Složitě vypadající integrand, který lze hezky upravit.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int \sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}\,dx = \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 1-x^2 \\ du = -2x\,dx \end{matrix} \right| = \arcsin x + c + \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \arcsin x + \sqrt{u} + c$$

$$= \mathbf{arcsin}\,\boldsymbol{x} + \sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^2} + \boldsymbol{c}$$

Příklad 38.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+10}}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^3+10 \\ du = 3x^2dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\,du = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt[3]{(\boldsymbol{x}^3+\mathbf{10})^2} + \boldsymbol{c}$$

Příklad 39.

$$\int x^2\sqrt{x+4}\,dx = \begin{vmatrix} u = x+4 \\ du = dx \\ x = u-4 \end{vmatrix} = \int (u-4)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2-8u+16)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 8u^{\frac{3}{2}} + 16u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 8\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 16\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{7}\sqrt{(x+4)^7} - \frac{16}{5}\sqrt{(x+4)^5} + \frac{32}{3}\sqrt{(x+4)^3} + c}$$

Příklad 40.

$$\int x^3\sqrt{x^2+3}\,dx = \int xx^2\sqrt{x^2+3}\,dx = \begin{vmatrix} u = x^2+3 \\ du = 2x\,dx \\ dx = \frac{1}{2x}du \\ x^2 = u-3 \end{vmatrix} = \int x(u-3)\sqrt{u}\frac{1}{2x}du$$

$$= \frac{1}{2}\int (u-3)\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{u^5} - \sqrt{u^3} + c = \boldsymbol{\frac{1}{5}\sqrt{(x^2+3)^5} - \sqrt{(x^2+3)^3} + c}$$

Příklad 41. Během integrace per partes musíme použít substituci.

$$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}dx = \int \frac{1}{x}x^{-2}\sin(x^{-1})\,dx = \begin{vmatrix} & D & & I \\ + & \frac{1}{x} & \searrow & x^{-2}\sin(x^{-1}) \\ - & -x^{-2} & \rightarrow & \cos(x^{-1}) \end{vmatrix}$$

Poznámka: $\int x^{-2}\sin(x^{-1})\,dx = \begin{vmatrix} u = x^{-1} \\ du = -x^{-2}dx \end{vmatrix} = -\int \sin u\,du = \cos(x^{-1}) + c.$

$$= \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \int x^{-2}\cos(x^{-1})\,dx = \begin{vmatrix} u = x^{-1} \\ du = -x^{-2}dx \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int \cos u\,du$$

$$= \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin u + c = \boldsymbol{\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + c}$$

4.8.2 Substituce za goniometrickou funkci

Pokud máme integrand ve tvaru $gon'(x)f(gon(x))$, pak provedeme substituci za danou goniometrickou funkci $gon(x)$. Při řešení těchto příkladů budeme hojně využívat tří základních vztahů mezi goniometrickými funkcemi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \mathrm{tg}^2\, x + 1 = \sec^2 x\,, \qquad \mathrm{cotg}^2\, x + 1 = \csc^2 x.$$

Vždy se budeme snažit upravit integrand tak, aby v něm byl buď pouze sinus a kosinus nebo tangens a sekans nebo kotangens a kosekans.

4.8.2.1 Integrál se sinem a kosinem

Používáme substituce:

$$\int \sin x\, f(\cos x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{matrix} \right| = -\int f(u)\, du,$$

$$\int \cos x\, f(\sin x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{matrix} \right| = \int f(u)\, du.$$

Příklad 42. Substituce za sinus.

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x \\ du = \cos x\, dx \end{matrix} \right| = \int (1 - u^2)\, du = u - \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \boldsymbol{\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c}$$

Příklad 43. Substituce za kosinus.

$$\int \sin x \sqrt{\cos x + \frac{\pi}{2}}\, dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x + \dfrac{\pi}{2} \\ du = -\sin x\, dx \end{matrix} \right| = -\int \sqrt{u}\, du = -\int u^{\frac{1}{2}}\, du = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\cos x + \frac{\pi}{2}\right)^3} + c}$$

Příklad 44. Integrál funkce tangens.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + c = \ln\left|\frac{1}{u}\right| + c$$

$$= \mathbf{-\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c}$$

Příklad 45. Trochu složitější integrál se substitucí za kosinus.

$$\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x)\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \ln(\cos x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{\ln u}{u} du$$

V integrandu je výraz $\ln(\cos x)$, definiční obor integrandu jsou tedy pouze ta x, pro která je kosinus kladný, tj. $x \in \left\{\left(-{}^{\pi}/_{2} + 2k\pi,\ {}^{\pi}/_{2} + 2k\pi\right) \middle| k \in \mathbb{R}\right\}$. A pro tato x platí rovnost: $\ln|u| = \ln u$. Takže per partes můžeme provést takto:

$$-\int \frac{\ln u}{u} du = \left| \begin{matrix} & D & & I \\ + & -\ln u & \searrow & \frac{1}{u} \\ - & -\frac{1}{u} & \rightarrow & \ln|u| \end{matrix} \right| = -\ln^2(u) + \int \frac{\ln u}{u} du.$$

$$\Rightarrow -2\int \frac{\ln u}{u} du = -\ln^2(u) \Rightarrow -\int \frac{\ln u}{u} du = -\frac{1}{2}\ln^2(\cos x) + c$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{tg} x \ln(\cos x)\, dx = -\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln^2(\cos x) + c}$$

Příklad 45. Jiné řešení pomocí jiné substituce.

$$\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x)\, dx \left| \begin{matrix} u = \ln(\cos x) \\ du = \dfrac{-\sin x}{\cos x} dx = -\operatorname{tg} x\, dx \end{matrix} \right| = -\int u\, du = -\boldsymbol{\frac{1}{2}\ln^2(\cos x) + c}$$

4.8.2.2 Integrál s tangens a sekans

Používáme substituce:

$$\int \sec^2 x\, f(\operatorname{tg} x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{tg} x \\ du = \sec^2 x\, dx \end{matrix} \right| = \int f(u)\, du,$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\, f(\sec x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \sec x \\ du = \sec x \operatorname{tg} x\, dx \end{matrix} \right| = \int f(u)\, du.$$

Příklad 46. Substituce za tangens.

$$\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x\,(\mathrm{tg}^2\,x + 1)\,dx = \left|\begin{matrix} u = \mathrm{tg}\,x \\ du = \sec^2 x\,dx \end{matrix}\right| = \int (u^2 + 1)\,du = \frac{u^3}{3} + u + c$$

$$= \boldsymbol{\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\,x + c}$$

Příklad 47. Úprava pomocí goniometrických vzorců nemusí vždy fungovat.

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x\,(\mathrm{tg}^2\,x + 1)\,dx = \int \sec x\,(\sec^2 x - 1 + 1)\,dx = \int \sec^3 x\,dx$$

Když jsme se pokusili výraz upravit, tak jsme se nikam nedostali, takže zkusíme jinou metodu. Použijeme výsledek z Příkladu 53:

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + c.$$

$$\int \sec^3 x\,dx = \left|\begin{matrix} & D & & I \\ + & \sec x & \searrow & \sec^2 x \\ - & \sec x\,\mathrm{tg}\,x & \rightarrow & \mathrm{tg}\,x \end{matrix}\right| = \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec x\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx$$

$$= \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

$$= \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec^3 x\,dx + \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + c_1$$

$$\Rightarrow 2\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + c_1$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 x\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sec x\,\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + c}$$

Příklad 48. V tomto příkladu použijeme výsledek z Příkladu 44:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \ln|\sec x| + c.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \operatorname{tg} x \,(\sec^2 x - 1)\, dx = \int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg} x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{tg} x \\ du = \sec^2 x \, dx \end{matrix} \right|$$

$$= \int u \, du - \ln|\sec x| + c = \frac{u^2}{2} - \ln|\sec x| + c = \boldsymbol{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\sec x| + c}$$

Příklad 49. Substituce za sekans.

$$\int \sec^4 x \operatorname{tg} x \, dx = \int \sec^3 x \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \sec x \\ du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx \end{matrix} \right| = \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + c$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\sec^4 x + c}$$

Příklad 49. Jiné řešení pomocí substituce za tangens:

$$\int \sec^4 x \operatorname{tg} x \, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x \operatorname{tg} x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{tg} x \\ du = \sec^2 x \, dx \end{matrix} \right| = \int (u^2 + 1) u \, du$$

$$= \int (u^3 + u) \, du = \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} + c = \boldsymbol{\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + c}$$

Funkce $\frac{1}{4}\sec^4 x$ a $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$ se liší o nějakou konstantu, konkrétně o $1/4$, takže jsou primitivní ke stejné funkci.

4.8.2.3 Integrál s kotangens a kosekans

Princip je stejný jako u integrálů s tangens a sekans. Používáme substituce:

$$\int \csc^2 x \, f(\operatorname{cotg} x) \, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{cotg} x \\ du = -\csc^2 x \, dx \end{matrix} \right| = -\int f(u) \, du,$$

$$\int \csc x \operatorname{cotg} x \, f(\csc x) \, dx = \left| \begin{matrix} u = \csc x \\ du = -\csc x \operatorname{cotg} x \, dx \end{matrix} \right| = -\int f(u) \, du.$$

Příklad 50. Substituce za kosekans.

$$\int \csc^4 x \operatorname{cotg} x \, dx = \int \csc^3 x \csc x \operatorname{cotg} x \, dx = \begin{vmatrix} u = \csc x \\ du = -\csc x \operatorname{cotg} x \, dx \end{vmatrix} = -\int u^3 \, du$$

$$= -\frac{u^4}{4} + c = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \mathbf{csc^4} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$$

Příklad 51. Substituce za kotangens.

$$\int \frac{e^{\operatorname{cotg} x}}{1 - \cos^2 x} dx = \int \csc^2 x \, e^{\operatorname{cotg} x} \, dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{cotg} x \\ du = -\csc^2 x \, dx \end{vmatrix} = -\int e^u du = -\boldsymbol{e}^{\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}$$

4.8.2.4 Substituce za součet goniometrických funkcí

Někdy může být užitečné substituovat za součet goniometrických funkcí.

Příklad 52. Substituce za součet funkcí sinus a kosinus.

$$\int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \begin{vmatrix} u = \cos x + \sin x \\ du = (-\sin x + \cos x) \, dx \end{vmatrix}$$

$$= \int \frac{1}{u} du = \mathbf{ln}|\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{c}$$

Příklad 53. Integrál funkce sekans. Po rozšíření zlomku můžeme substituovat za součet funkcí sekans a tangens.

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x \, (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \begin{vmatrix} u = \sec x + \operatorname{tg} x \\ du = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x) \, dx \\ du = \sec x \, (\sec x + \operatorname{tg} x) \, dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln|u| + c = \mathbf{ln}|\mathbf{sec}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{c}$$

Příklad 54. Integrál funkce kosekans. Po rozšíření zlomku můžeme substituovat za součet funkcí kosekans a kotangens.

$$\int \csc x \, dx = \int \frac{\csc x \, (\csc x + \operatorname{cotg} x)}{\csc x + \operatorname{cotg} x} dx = \begin{vmatrix} u = \csc x + \operatorname{cotg} x \\ du = (-\csc x \operatorname{cotg} x + -\csc^2 x) \, dx \\ du = -\csc x \, (\csc x + \operatorname{cotg} x) \, dx \end{vmatrix}$$

$$= -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + c = -\mathbf{ln}|\mathbf{csc}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{cotg}\,\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{c}$$

4.8.2.5 Libovolný integrál v rámci goniometrických funkcí

Pokud máme libovolný integrand v rámci funkcí sinus a kosinus, pak můžeme použít substituci:

$$u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Výrazy získané použitím této substituce většinou vyžadují rozklad na parciální zlomky, který budeme probírat až v oddíle „Integrace racionální funkce“. Proto je tento druh substituce podrobně popsaný až v oddílu „Racionalizace integrálu“.

4.8.3 Substituce za hyperbolickou funkci

Hyperbolické funkce se chovají podobně jako goniometrické, takže jejich substituce je také velmi podobná. Pokud máme integrand ve tvaru $hyp'(x)f(hyp(x))$, pak provedeme substituci za danou hyperbolickou funkci $hyp(x)$. Stejně jako u substituce za goniometrickou funkci budeme hojně využívat těchto tří základních vztahů:

$$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x, \qquad \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1, \qquad \operatorname{csch}^2 x + 1 = \coth^2 x.$$

A opět se budeme snažit upravit integrand tak, aby v něm byl buď pouze hyperbolický sinus a kosinus nebo tangens a sekans nebo kotangens a kosekans. Při řešení integrálů s hyperbolickými funkcemi můžeme ještě navíc využít jejich definic.

Používáme substituce:

$$\int e^x f(e^x)\, dx = \begin{vmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{vmatrix} = \int f(u)\, du,$$

$$\int \sinh x\, f(\cosh x)\, dx = \begin{vmatrix} u = \cosh x \\ du = \sinh x\, dx \end{vmatrix} = \int f(u)\, du,$$

$$\int \cosh x\, f(\sinh x)\, dx = \begin{vmatrix} u = \sinh x \\ du = \cosh x\, dx \end{vmatrix} = \int f(u)\, du,$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\, f(\tanh x)\, dx = \begin{vmatrix} u = \tanh x \\ du = \operatorname{sech}^2 x\, dx \end{vmatrix} = \int f(u)\, du,$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x\, f(\operatorname{sech} x)\, dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{sech} x \\ du = -\operatorname{sech} x \tanh x\, dx \end{vmatrix} = -\int f(u)\, du,$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x\, f(\coth x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \coth x \\ du = -\operatorname{csch}^2 x\, dx \end{matrix} \right| = -\int f(u)\, du,$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x\, f(\operatorname{csch} x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{csch} x \\ du = -\operatorname{csch} x \coth x\, dx \end{matrix} \right| = -\int f(u)\, du.$$

Příklad 55. Substituce za hyperbolický sinus.

$$\int \operatorname{sech} x\, dx = \int \frac{1}{\cosh x} dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} dx = \int \frac{\cosh x}{\sinh^2 x + 1} dx = \left| \begin{matrix} u = \sinh x \\ du = \cosh x\, dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \operatorname{arctg} u + c = \mathbf{arctg}(\mathbf{sinh}\, \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}$$

Příklad 55. Jiné řešení pomocí substituce za exponenciální funkci.

$$\int \operatorname{sech} x\, dx = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{2e^x}{(e^x)^2 + 1} dx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{2}{u^2 + 1} du$$
$$= 2 \operatorname{arctg} u + c = \mathbf{2\, arctg}(\boldsymbol{e^x}) + \boldsymbol{c}$$

Když jsme zvolili jinou metodu řešení, tak jsme dostali jiný výsledek, to ale neznamená že jsme udělali chybu. Jen to znamená, že funkce $2 \operatorname{arctg}(e^x)$ a $\operatorname{arctg}(\sinh x)$ mají stejnou derivaci, takže jsou primitivní ke stejné funkci a liší se o nějakou konstantu, konkrétně o ${}^{\pi}/_{2}$.

Příklad 56. Použití Osbornova pravidla.

$$\int \sinh^2 x\, dx$$

Osbornovo pravidlo:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \Rightarrow -\sinh^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cosh(2x)).$$

Takže:

$$\int \sinh^2 x\, dx = \frac{1}{2} \int (\cosh(2x) - 1)\, dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \mathbf{sinh}(\mathbf{2}\boldsymbol{x}) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}.$$

Příklad 57.

$$\int \sinh^3 x\,dx = \int \sinh^2 x \sinh x\,dx = \int (\cosh^2 x - 1)\sinh x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \cosh x \\ du = \sinh x\,dx \end{matrix}\right|$$
$$= \int (u^2 - 1)\,du = \frac{u^3}{3} - u + c = \boldsymbol{\frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + c}$$

Příklad 58. Na konci řešení využijeme skutečnosti, že funkce $\cosh(x)$ je vždy kladná.

$$\int \tanh x\,dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}dx = \left|\begin{matrix} u = \cosh x \\ du = \sinh x\,dx \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{u}du = \ln|\cosh x| + c$$
$$= \boldsymbol{\ln(\cosh x) + c}$$

4.8.4 Integrál inverzní funkce

Věta 13. *Nechť je funkce $f^{-1}(x)$ spojitá na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a je inverzní k funkci f a nechť je funkce F primitivní k f. Potom pro všechna $x \in J$ platí:*

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big) + c.$$

Důkaz: Tvrzení můžeme dokázat derivováním pravé strany rovnosti.

$$\frac{d}{dx}\big(xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big) + c\big) = f^{-1}(x) + x\frac{d}{dx}f^{-1}(x) - f\big(f^{-1}(x)\big)\frac{d}{dx}f^{-1}(x)$$
$$= f^{-1}(x) + x\frac{d}{dx}f^{-1}(x) - x\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = f^{-1}(x)$$

Jiný důkaz: Tvrzení můžeme dokázat substitucí za $f^{-1}(x)$.

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \left|\begin{matrix} u = f^{-1}(x) \\ x = f(u) \\ dx = f'(u)du \end{matrix}\right| = \int uf'(u)\,du = \left|\begin{matrix} & D & & I \\ + & u & \searrow & f'(u) \\ - & 1 & \searrow & f(u) \\ + & 0 & \to & F(u) \end{matrix}\right|$$
$$= uf(u) - F(u) + c = xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big) + c$$

Příklad 59. Integrál funkce arkus kosinus.

$$\int \arccos x\,dx = \left|\begin{matrix} f^{-1}(x) = \arccos x \\ f(x) = \cos x \\ F(x) = \sin x \end{matrix}\right| = \boldsymbol{x \arccos x - \sin(\arccos x) + c}$$

Výsledek zjednodušíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku. Arkus kosinus je totiž úhel. Kosinus je v pravoúhlém trojúhelníku poměr přilehlé strany a přepony a sinus protilehlé a přepony. A toho můžeme využít.

$$= \left| \begin{array}{c} \cos(\arccos x) = x = \dfrac{x}{1} = \dfrac{přilehlá}{přepona} \Rightarrow protilehlá = \sqrt{1^2 - x^2} \\ \sin(\arccos x) = \dfrac{protilehlá}{přepona} = \dfrac{\sqrt{1^2 - x^2}}{1} = \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right|$$

$$= \boldsymbol{x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c}$$

Příklad 22. Jiné řešení pomocí Věty 13.

$$\int \sinh^{-1} x \, dx = \left| \begin{array}{c} f^{-1}(x) = \sinh^{-1} x \\ f(x) = \sinh x \\ F(x) = \cosh x \end{array} \right| = \boldsymbol{x \sinh^{-1} x - \cosh(\sinh^{-1} x) + c} =$$

Zjednodušíme výraz $\cosh(\sinh^{-1} x)$:

$$\cosh(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} + e^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} + \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - (x^2+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} - x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \sqrt{x^2+1}.$$

Výsledek po zjednodušení:

$$= \boldsymbol{x \sinh^{-1} x - \sqrt{x^2 + 1} + c}.$$

4.8.5 Ostatní substituce

Příklad 60. Substituce za arkus sinus.

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \begin{array}{c} u = \arcsin x \\ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{array} \right| = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + c = \boldsymbol{\frac{1}{2} \arcsin^2 x + c}$$

Příklad 61. Substituce za arkus tangens.

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \end{matrix} \right| = \int u\,du = \boldsymbol{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c}$$

Příklad 62. Po úpravě můžeme substituovat za exponenciální funkci. Na konci využijeme faktu, že výraz $1 + e^x$ je vždy kladný.

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1+e^x}{1+e^x}\,dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{matrix} \right|$$

$$= x - \int \frac{1}{1+u}\,du = x - \ln|1+u| + c = \boldsymbol{x - \ln(1+e^x) + c}$$

Příklad 63. Substituce za přirozený logaritmus. V tomto příkladu použijeme výsledek z Příkladu 65:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$$

$$\int \frac{\sqrt{1-\ln^2(x)}}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \dfrac{1}{x}\,dx \end{matrix} \right| = \int \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{1}{2}\arcsin u + \frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2} + c$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\arcsin(\ln x) + \frac{1}{2}\ln(x)\sqrt{1-\ln^2(x)} + c}$$

Příklad 64. Složitější příklad s dvojnásobnou substitucí.

$$\int \frac{1}{x(1+\sin^2(\ln x))}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \dfrac{1}{x}\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{1+\sin^2 u}\,du = \int \frac{\dfrac{1}{\cos^2 u}}{\dfrac{1}{\cos^2 u} + \dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}\,du$$

$$= \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u + \operatorname{tg}^2 u}\,du = \int \frac{\sec^2 u}{\operatorname{tg}^2 u + 1 + \operatorname{tg}^2 u}\,du = \left| \begin{matrix} w = \operatorname{tg} u \\ dw = \sec^2 u\,du \end{matrix} \right|$$

$$= \int \frac{1}{2w^2+1}\,dw = \int \frac{1}{\left(\sqrt{2}w\right)^2 + 1}\,dw = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}w) + c$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} u\right) + c = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}(\ln x)\right) + c}$$

4.9 Integrace metodou substituce nové funkce

Věta 14. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a funkce ϕ má spojitou derivaci na intervalu $J_1 \subset J$, přičemž $\phi(J_1) \subset J$. Potom pro všechna $\theta \in J_1$ platí:*

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\phi(\theta)\big)\phi'(\theta)\,d\theta.$$ [31]

Důkaz: Tvrzení dokážeme substitucí $x = \phi(\theta), \theta \in J_1$:

$$\int f\big(\phi(\theta)\big)\phi'(\theta)\,d\theta = \begin{vmatrix} x = \phi(\theta) \\ dx = \phi'(\theta)\,d\theta \end{vmatrix} = \int f(x)\,dx.$$

Tyto substituce se většinou používají, pokud je v integrandu nějaký složitější výraz pod odmocninou a cílem této substituce je dostat nový integrand bez odmocniny.

4.9.1 Trigonometrické substituce

Těmto substitucím se také někdy říká goniometrické. Během těchto substitucí budeme využívat základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \mathrm{tg}^2\, x + 1 = \sec^2 x\,, \qquad \mathrm{cotg}^2\, x + 1 = \csc^2 x.$$

Většinu úloh můžeme rozdělit do tří kategorií podle výrazu, který se objevuje v integrandu. Strategie pro jejich řešení jsou popsané v tabulce níže. V řádku tabulky je nejdřív výraz v integrandu, pak substituce, kterou provedeme, pak derivace této substituce, a nakonec goniometrická identita, kterou budeme používat pro zjednodušení nového integrandu.

Výraz	Substituce	Derivace	Vzorec
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta$	$dx = a\cos\theta\,d\theta$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\,\mathrm{tg}\,\theta$	$dx = a\sec^2\theta\,d\theta$	$\mathrm{tg}^2\,\theta + 1 = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$dx = a\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta$	$\sec^2\theta - 1 = \mathrm{tg}^2\,\theta$

[31] srov. Substituční metoda. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2021-12-18]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Substitu%C4%8Dn%C3%AD_metoda_(integrov%C3%A1n%C3%AD)

Pro každou z těchto tří substitucí existuje alternativní substituce, viz tabulka níže.

Výraz	Substituce	Derivace	Vzorec
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\cos\theta$	$dx = -a\sin\theta\, d\theta$	$1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\operatorname{cotg}\theta$	$dx = -a\csc^2\theta\, d\theta$	$\operatorname{cotg}^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\csc\theta$	$dx = -a\csc\theta\operatorname{cotg}\theta\, d\theta$	$\csc^2\theta - 1 = \operatorname{cotg}^2\theta$

4.9.1.1 Substituce funkce sinus

Všechny integrály, které lze vyřešit substitucí funkce sinus lze vyřešit i substitucí funkce kosinus.

Příklad 65. K vrácení se ze substituce využíváme goniometrických identit.

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \left| \begin{matrix} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta\, d\theta \end{matrix} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos(2\theta))\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + c = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + c$$

$$= \left| \begin{matrix} \theta = \arcsin x \\ \sin\theta = x \\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2} \end{matrix} \right| = \boldsymbol{\frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c}$$

Příklad 66. Složitější substituce čtverce funkce sinus.

$$\int \sqrt{\frac{a}{x} - 1}\, dx = \int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin^2\theta \\ dx = a \cdot 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \end{matrix} \right|$$

$$= \int \sqrt{\frac{a - a\sin^2\theta}{a\sin^2\theta}}\, 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 2a\int \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int \cos^2\theta\, d\theta = 2a\int \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\, d\theta = a\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + c$$

$$= a\theta + a\sin\theta\cos\theta + c = \left| \begin{matrix} \sin^2\theta = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{\dfrac{x}{a}} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x}{a}}\right) \\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\dfrac{a}{a} - \dfrac{x}{a}} = \sqrt{\dfrac{a-x}{a}} \end{matrix} \right|$$

$$= a\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right) + a\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{\frac{a-x}{a}} + c = \boldsymbol{a}\,\mathbf{arcsin}\left(\sqrt{\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}}\right) + \sqrt{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x})} + \boldsymbol{c}$$

4.9.1.2 Substituce funkce tangens

Všechny integrály, které lze vyřešit substitucí funkce tangens lze vyřešit i substitucí funkce kotangens.

Příklad 67. Při řešení této úlohy použijeme vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku abychom se vrátili ze substituce.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+25)^3}}\,dx = \left|\begin{matrix} x = 5\operatorname{tg}\theta \\ dx = 5\sec^2\theta\,d\theta \end{matrix}\right| = \int \frac{5\sec^2\theta}{\left(25(\operatorname{tg}^2\theta+1)\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \frac{5}{5^3}\int \frac{\sec^2\theta}{(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{25}\sin\theta + c$$

$$= \left|\begin{matrix} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{5} = \dfrac{protilehlá}{přilehlá} & \sin\theta = \dfrac{protilehlá}{přepona} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+25}} \\ PV: přepona = \sqrt{x^2+25} & \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{25}\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{25}}} + \boldsymbol{c}$$

Příklad 68. Nestandardní využití goniometrické substituce.

$$\int \frac{x^8}{(x^6+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2(x^3)^2}{((x^3)^2+1)^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x^3 = \operatorname{tg}\theta \\ 3x^2dx = \sec^2\theta\,d\theta \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{(\operatorname{tg}^2\theta+1)^2}\sec^2\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\operatorname{tg}^2\theta\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{3}\int \operatorname{tg}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))\,d\theta = \frac{1}{6}\theta - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\sin(2\theta) + c$$

$$= \frac{1}{6}\theta - \frac{1}{6}\sin\theta\cos\theta + c = \left|\begin{matrix} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x^3}{1} = \dfrac{protilehlá}{přilehlá} & \sin\theta = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^6+1}} \\ PV: přepona = \sqrt{x^6+1} & \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^6+1}} \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{arctg}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}) - \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{6}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{6}}+\mathbf{1})} + \boldsymbol{c}$$

Příklad 69. V tomto příkladu použijeme výsledek z Příkladu 25:

$$\int \sec^{\mathrm{n}}(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\operatorname{tg}(x)\sec^{\mathrm{n}-2}(x) + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{\mathrm{n}-2}(x)\,dx.$$

$$\int x^2\sqrt{x^2+3}\,dx = \left|\begin{matrix} x = \sqrt{3}\operatorname{tg}\theta \\ dx = \sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta \end{matrix}\right| = \int 3\operatorname{tg}^2\theta\sqrt{3\operatorname{tg}^2\theta+3}\sqrt{3}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 9\int \operatorname{tg}^2\theta\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta+1}\sec^2\theta\,d\theta = 9\int \operatorname{tg}^2\theta\sec^3\theta\,d\theta$$

$$= 9\int(\sec^2\theta-1)\sec^3\theta\,d\theta = 9\left(\int \sec^5\theta\,d\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta\right)$$

$$= 9\left(\frac{1}{4}\operatorname{tg}\theta\sec^3\theta + \frac{3}{4}\int \sec^3\theta\,d\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta\right)$$

$$= \frac{9}{4}\left(\operatorname{tg}\theta\sec^3\theta - \int \sec^3\theta\,d\theta\right)$$

$$= \frac{9}{4}\left(\operatorname{tg}\theta\sec^3\theta - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\sec\theta - \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta\right)$$

Použijeme výsledek z Příkladu 53: $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$.

$$= \frac{9}{4}\operatorname{tg}\theta\sec^3\theta - \frac{9}{8}\operatorname{tg}\theta\sec\theta - \frac{9}{8}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + c_1$$

A nyní se potřebujeme vrátit zpět ze substituce. Opět použijeme trik s pravoúhlým trojúhelníkem.

$$= \left|\begin{matrix} \operatorname{tg}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{protilehlá}{přilehlá} & \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{přepona}{přilehlá} = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}} \\ PV: přepona = \sqrt{x^2+3} & \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x^2+3}{3} - \frac{9}{8}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}} - \frac{9}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}}\right| + c_1$$

$$= \frac{1}{4}x\sqrt{x^2+3}(x^2+3) - \frac{3}{8}x\sqrt{x^2+3} - \frac{9}{8}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| - \ln\left|\sqrt{3}\right|\right) + c_1$$

$$= \frac{1}{8}x\sqrt{x^2+3}\,[2(x^2+3)-3] - \frac{9}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) + \frac{9}{8}\ln\sqrt{3} + c_1$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{8}\left(x(2x^2+3)\sqrt{x^2+3} - 9\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)\right) + c_2}$$

Kdybychom ten přirozený logaritmus neupravili, tak bychom dostali:

$$\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}}+\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{x^2}{3}+1}\right)=\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right).$$

Další řešení tedy je:

$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}\left(x(2x^2+3)\sqrt{x^2+3}-9\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)+c_1}.$$

Zkouška derivací primitivní funkce: Ukážeme, že platí rovnost:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{8}\left(x(2x^2+3)\sqrt{x^2+3}-9\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)=x^2\sqrt{x^2+3}$$

$$K=\frac{d}{dx}\left(x(2x^2+3)\sqrt{x^2+3}-9\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)=8x^2\sqrt{x^2+3}.$$

$$K=\frac{d}{dx}x(2x^2+3)\sqrt{x^2+3}-\frac{d}{dx}9\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}x(2x^2+3)\sqrt{x^2+3}=(2x^2+3)\sqrt{x^2+3}+x(4x)\sqrt{x^2+3}+x(2x^2+3)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

$$=4x^2\sqrt{x^2+3}+(2x^2+3)\left(\sqrt{x^2+3}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}\right)$$

$$=4x^2\sqrt{x^2+3}+(x^2+x^2+3)\frac{x^2+3+x^2}{\sqrt{x^2+3}}=\left|Sub: a=\sqrt{x^2+3}\right|$$

$$=4x^2a+\frac{(a^2+x^2)^2}{a}=4x^2a+\frac{a^4+2a^2x^2+x^4}{a}=\left|\begin{array}{c}a^2=x^2+3\\ x^2=a^2-3\\ x^4=a^4-6a^2+9\end{array}\right|$$

$$=4x^2a+\frac{2a^4+2a^2x^2-6a^2+9}{a}=4x^2a+2a^3+2ax^2-6a+\frac{9}{a}$$

$$=6x^2a+2a(x^2+3)-6a+\frac{9}{a}=6x^2a+2ax^2+\frac{9}{a}=8x^2a+\frac{9}{a}$$

$$\frac{d}{dx}9\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=9\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{3}+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{\frac{x^2+3}{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{x^2+3}}=\frac{9}{a}$$

$$K = 8x^2a + \frac{9}{a} - \frac{9}{a} = 8x^2a = 8x^2\sqrt{x^2+3}$$

Při řešení jsme tedy neudělali žádnou chybu.

4.9.1.3 Substituce funkce sekans

Všechny integrály, které lze vyřešit substitucí funkce sekans lze vyřešit i substitucí funkce kosekans

Příklad 70.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \left| \begin{matrix} x = 2\sec\theta \\ dx = 2\sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{matrix} \right| = \int \frac{2\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{2\sec\theta\sqrt{4(\sec^2\theta - 1)}}d\theta = \int \frac{\operatorname{tg}\theta}{2\operatorname{tg}\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\theta = \left| \begin{matrix} x = \dfrac{2}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2}{x} \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{2}{x}\right) \end{matrix} \right| = \boldsymbol{\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{x}\right) + c}$$

4.9.2 Hyperbolické substituce

Integrály řešitelné goniometrickou substitucí lze vyřešit i odpovídající hyperbolickou substitucí. Někdy může být lepší volbou goniometrická, někdy hyperbolická substituce.

Při těchto substitucí budeme využívat základní vztahy mezi hyperbolickými funkcemi:

$$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x, \qquad \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1, \qquad \operatorname{csch}^2 x + 1 = \coth^2 x.$$

Podobně jako u goniometrických substitucí můžeme většinu úloh rozdělit do tří kategorií. Strategie pro jejich řešení jsou popsané v tabulce níže.

Výraz	Substituce	Derivace	Vzorec
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\tanh\theta$	$dx = a\operatorname{sech}^2\theta\, d\theta$	$1 - \tanh^2\theta = \operatorname{sech}^2\theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\sinh\theta$	$dx = a\cosh\theta\, d\theta$	$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\cosh\theta$	$dx = a\sinh\theta\, d\theta$	$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$

Stejně jako u goniometrických funkcí vždy existuje alternativní substituce, která může, ale nemusí být lepší volbou.

Výraz	Substituce	Derivace	Vzorec
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sech} \theta$	$dx = -a \operatorname{sech} \theta \tanh \theta \, d\theta$	$1 - \operatorname{sech}^2 \theta = \tanh^2 \theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \operatorname{csch} \theta$	$dx = -a \operatorname{csch} \theta \coth \theta \, d\theta$	$\operatorname{csch}^2 x + 1 = \coth^2 x$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \coth \theta$	$dx = -a \operatorname{csch}^2 \theta \, d\theta$	$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

4.9.2.1 Substituce funkce hyperbolický tangens

Všechny integrály, které lze vyřešit substitucí funkce hyperbolický tangens lze vyřešit i substitucí funkce hyperbolický sekans.

Příklad 71. Substituce funkce hyperbolický sekans.

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx = \left| \begin{matrix} x = \operatorname{sech} \theta \\ dx = -\operatorname{sech} \theta \tanh \theta \, d\theta \end{matrix} \right| = -\int \frac{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2 \theta}}{\operatorname{sech} \theta} \operatorname{sech} \theta \tanh \theta \, d\theta$$

$$= -\int \tanh^2 \theta \, d\theta = -\int (1 - \operatorname{sech}^2 \theta) \, d\theta = -\theta + \tanh \theta + c$$

$$= \left| \begin{matrix} \theta = \operatorname{sech}^{-1}(x) = \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\ \tanh \theta = \sqrt{1 - \operatorname{sech}^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2} \end{matrix} \right| = \boldsymbol{\sqrt{1-x^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + c}$$

4.9.2.2 Substituce funkce hyperbolický sinus

Všechny integrály, které lze vyřešit substitucí funkce hyperbolický sinus lze vyřešit i substitucí funkce hyperbolický kosekans.

Příklad 72.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = 2\sinh\theta \\ dx = 2\cosh\theta\, d\theta \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{4(\sinh^2\theta + 1)}}{4\sinh^2\theta} 2\cosh\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{2\cosh\theta}{4\sinh^2\theta} 2\cosh\theta\, d\theta = \int \coth^2\theta\, d\theta = \int (1 + \operatorname{csch}^2 x)\, d\theta$$

$$= \theta - \coth\theta + c = \left| \begin{array}{c} \sinh\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \theta = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \\ \operatorname{csch}^2 x = \frac{1}{\sinh^2\theta} = \frac{4}{x^2} = \\ \coth\theta = \sqrt{1 + \operatorname{csch}^2 x} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \end{array} \right|$$

$$= \boldsymbol{\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + c_1}$$

Když upravíme $\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$, tak dostaneme:

$$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + 1}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) - \ln 2.$$

Další řešení tedy je:

$$= \boldsymbol{\ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) - \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + c_2.}$$

Příklad 69. Jiné řešení pomocí substituce hyperbolického sinu.

$$\int x^2\sqrt{x^2+3}\,dx = \left|\begin{matrix} x = \sqrt{3}\sinh\theta \\ dx = \sqrt{3}\cosh\theta\,d\theta \end{matrix}\right| = \int 3\sinh^2\theta\sqrt{3\sinh^2\theta+3}\sqrt{3}\cosh\theta\,d\theta$$

$$= 9\int \sinh^2\theta\cosh^2\theta\,d\theta = 9\int \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}d\theta$$

$$= \frac{9}{16}\int (e^{2x}-e^{-2x})^2\,d\theta = \frac{9}{16}\int (e^{4x}-2+e^{-4x})\,d\theta$$

$$= \frac{9}{16}\int (-2)\,d\theta + \frac{9}{8}\int \frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}d\theta = -\frac{9}{8}\int d\theta + \frac{9}{8}\int \cosh(4\theta)\,d\theta$$

$$= -\frac{9}{8}\left(\theta - \frac{1}{4}\sinh(4\theta)\right) + c = \frac{1}{8}\left(\frac{9}{4}\sinh(4\theta) - 9\theta\right) + c$$

K vrácení se ze substituce využijeme Osbornovo pravidlo.

$$= \left|\begin{matrix} \sinh\theta = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \sinh^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) \\ \sin(4\theta) = 2\sin(2\theta)\cos(2\theta) = 4\sin\theta\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1) \\ \Rightarrow \sinh(4\theta) = 4\sinh\theta\cosh\theta\,(2\cosh^2\theta - 1) \\ \cosh\theta = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \sqrt{\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{3}{3}} = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}} \\ \sinh(4\theta) = 4\dfrac{x}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{2(x^2+3)}{3} - \dfrac{3}{3}\right) = \dfrac{4}{9}x\sqrt{x^2+3}(2x^2+3) \end{matrix}\right|$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{8}\left(x\sqrt{x^2+3}(2x^2+3) - 9\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) + c}$$

4.9.2.3 Substituce funkce hyperbolický kosinus

Všechny integrály, které lze vyřešit substitucí funkce hyperbolický kosinus lze vyřešit i substitucí funkce hyperbolický kotangens.

Příklad 73. V tomto příkladu využijeme výsledek z Příkladu 56:

$$\int \sinh^2 x \, dx = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{1}{2}x + c.$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \left| \begin{matrix} x = a\cosh\theta \\ dx = a\sinh\theta \, d\theta \end{matrix} \right| = \int \sqrt{a^2(\cosh^2 x - 1)}\, a\sinh\theta \, d\theta$$

$$= a^2 \int \sinh^2\theta \, d\theta = a^2\left(\frac{1}{4}\sinh(2\theta) - \frac{1}{2}\theta\right) + c = \frac{a^2}{4}\sinh(2\theta) - \frac{a^2}{2}\theta + c$$

$$= \left| \begin{matrix} \cosh\theta = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \theta = \cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) \\ \sinh\theta = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{a^2}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \\ \sinh(2\theta) = 2\sinh\theta\cosh\theta = 2\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\cdot\dfrac{x}{a} = \dfrac{2}{a^2}x\sqrt{x^2 - a^2} \end{matrix} \right|$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c_1}$$

Když upravíme $\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, tak dostaneme:

$$\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a.$$

Další řešení tedy je:

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + c_2}.$$

4.10 Integrace racionální funkce

V tomto oddílu jsem vycházel převážně z kurzu *Calculus 2*, který je dostupný na webu *Blackpenredpen*[32] a ze článku zveřejněném na *Wikipedii*.[33]

Racionální funkce je podíl dvou polynomů, jde tedy o integrály ve tvaru

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx,$$

kde $P_m(x)$ je polynom m-tého stupně a $Q_n(x)$ je polynom n-tého stupně.

Pokud je $P_m(x)$ polynom vyššího nebo stejného stupně jako $Q_n(x)$, tak můžeme provést dělení polynomu polynomem a dostaneme:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{G_t(x)}{Q_n(x)},\ \text{ kde } t < n.$$

Pokud je $P_m(x)$ polynom nižšího stupně než $Q_n(x)$, tak tento podíl rozložíme na takzvané parciální zlomky, tj. zlomky, jejichž součet je roven tomuto podílu. Prvním krokem je rozložit jmenovatel na součin nerozložitelných činitelů. V oboru reálných čísel jsou nerozložitelné pouze polynomy prvního stupně a polynomy druhého stupně se záporným diskriminantem. Polynomy vyššího stupně, než dva se vždy dají rozložit. Polynomy lichého stupně mají vždy alespoň jeden reálný kořen a polynomy sudého stupně bez reálných kořenů vždy lze rozložit na součin dvou nelineárních polynomů.

Většinu integrálů racionálních funkcí je nejefektivnější řešit rozkladem na parciální zlomky, ale ne všechny. Výjimka jsou například integrály ve tvaru:

$$\int \frac{1}{x + x^n}\,dx.$$

Tyto integrály samozřejmě lze vyřešit rozkladem na parciální zlomky, ale mnohem efektivnější je použít substituci.

[32] Calculus 2. *Blackpenredpen* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://www.blackpenredpen.com/calc2

[33] Integrace racionálních funkcí. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-01-02]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Integrace_racion%C3%A1ln%C3%ADch_funkc%C3%AD

$$\int \frac{1}{x + x^n}\,dx = \int \frac{x^{-n}}{x^{-n+1} + 1}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^{-n+1} \\ du = (1-n)x^{-n}\,dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{1-n} \int \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= \frac{1}{1-n} \ln|x^{-n+1} + 1| = -\frac{1}{n-1} \ln\left| \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{x^{n-1}}{x^{n-1}} \right|$$

$$= -\frac{1}{n-1} (\ln|1 + x^{n-1}| - \ln|x^{n-1}|) = \ln|x| - \frac{1}{n-1} \ln|x^{n-1} + 1|$$

4.10.1 Tabulkové integrály racionálních funkcí

Příklad 74.

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{a} \ln|ax + b| + c}$$

Příklad 75.

$$\int \frac{x}{ax^2 + b}\,dx = \left| \begin{matrix} u = ax^2 + b \\ du = 2ax \end{matrix} \right| = \frac{1}{2a} \int \frac{1}{u}\,du = \boldsymbol{\frac{1}{2a} \ln|ax^2 + b| + c}$$

Příklad 76.

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = a\,\mathrm{tg}\,\theta \\ dx = a \sec^2\theta\,d\theta \end{matrix} \right| = \int \frac{a \sec^2 \theta}{a^2(\mathrm{tg}^2\,\theta + 1)}\,d\theta = \frac{1}{a}\theta = \boldsymbol{\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c}$$

4.10.2 Rozklad na parciální zlomky

4.10.2.1 Různí lineární činitelé

Pokud je možné jmenovatel racionální funkce rozložit na součin n různých lineárních činitelů, pak je jej možné rozložit na parciální zlomky takto:

$$\frac{P(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}.$$

Spočítat konstanty A_1, $A_2, \ldots A_n$ je velmi snadné. Např. konstantu A_1 bychom určili takto:

$$\frac{P(x)}{(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)} = A_1 + A_2\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} + \cdots + A_n\frac{a_1x + b_1}{a_nx + b_n}.$$

Pokud za x dosadíme hodnotu $-b_1/a_1$, tak bude výraz $a_1x + b_1$ roven nule, tedy:

$$A_1 = \frac{P(x)}{(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)} \Leftrightarrow x = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Integrály těchto racionálních funkcí je tedy možné převést na součet integrálů ve tvaru:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c.$$

Příklad 77.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\,dx$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \left| \begin{array}{c} x=a\colon A = \frac{1}{a+a} = \frac{1}{2a} \\ x=-a\colon B = \frac{1}{-a-a} = -\frac{1}{2a} \end{array} \right| = \frac{\frac{1}{2a}}{x-a} - \frac{\frac{1}{2a}}{x+a}$$

Takže tento integrál můžeme rozložit na součet dvou integrálů.

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,dx - \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,dx = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + c$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + c = \boldsymbol{\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c}$$

Příklad 78.

$$\int \frac{8x-17}{x^2-5x+4}\,dx = \int \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{B}{x-4}\,dx$$

$$= \left| \begin{array}{c} x=1\colon A = \frac{8-17}{1-4} = 3 \\ x=4\colon B = \frac{32-17}{4-1} = 5 \end{array} \right| = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{5}{x-4}\,dx$$

$$= \boldsymbol{3\ln|x-1| + 5\ln|x-4| + c}$$

4.10.2.2 Různí kvadratičtí činitelé

Pokud je možné jmenovatel racionální funkce rozložit na součin n různých kvadratických činitelů bez reálných kořenů, pak je jej možné rozložit na parciální zlomky takto:

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)}=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}.$$

Konstanty $A_1,\ B_1,\dots A_n,\ B_n$ spočítáme tak, že obě strany rovnosti vynásobíme polynomem ve jmenovateli a porovnáme koeficienty u různých mocnin proměnné x.

Integrály těchto racionálních funkcí je tedy možné převést na součet integrálů ve tvaru:

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Integrál tohoto tvaru můžeme vyřešit například tak, že v jmenovateli doplníme na úplný čtverec, provedeme substituci za odmocninu tohoto čtverce a náš nově vzniklý integrál rozdělíme na součet dvou tabulkových integrálů:

$$\int\frac{Mu+N}{u^2+R^2}\,du=M\int\frac{u}{u^2+R^2}\,du+N\int\frac{1}{u^2+R^2}\,du.$$

Tato substituce je lineární, takže jí můžeme snadno přeskočit.

Příklad 79. Kvadratický polynom $x^2+6x+13$ nemá reálné kořeny.

$$\int\frac{6x+14}{x^2+6x+13}\,dx=\int\frac{6x+14}{x^2+6x+9-9+13}\,dx=\int\frac{6x+18-18+14}{(x+3)^2+4}\,dx$$

$$=\int\frac{6(x+3)-4}{(x+3)^2+4}=\left|\begin{matrix}u=x+3\\du=dx\end{matrix}\right|=6\int\frac{u}{u^2+4}\,dx-4\int\frac{1}{u^2+2^2}\,dx$$

$$=6\frac{1}{2}\ln|u^2+4|-4\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right)+c$$

$$=\mathbf{3\ln\left|x^2+6x+13\right|-2\,arctg\left(\frac{x+3}{2}\right)+c}$$

Příklad 80. Polynomy v čitately i jmenovateli jsou oba kvadratické, takže nejdřív provedeme dělení polynomu polynomem.

$$\int \frac{2x^2+8x+5}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{2x^2+8x+26-21}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{2(x^2+4x+13)-21}{x^2+4x+13}dx$$

$$= \int 2\,dx - 21\int \frac{1}{x^2+4x+13}dx = 2x + c - 21\int \frac{1}{x^2+4x+4+9}dx$$

$$= 2x - 21\int \frac{1}{(x+2)^2+3^2}dx + c = 2x - 21\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

$$= \boldsymbol{2x - 7\,\mathbf{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c}$$

Příklad 81.

$$\int \frac{x-1}{x^4-1}dx = \int \frac{x-1}{(x^2-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx =$$

Pro vedeme rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Konstantu A určíme v $x=-1$: $A = 1/(1+1) = 1/2$. Ostatní konstanty určíme takto:

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$0x^2 + 0x + 1 = x^2(A+B) + x(B+C) + (A+C)$$

$$0 = A + B \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{2}$$

$$1 = A + C \Rightarrow C = 1 - A = \frac{1}{2}.$$

Původní zlomek tedy můžeme rozložit na parciální zlomky.

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x\right) + c$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + c}$$

Příklad 82.

$$\int \frac{4x^2 - 9x + 2}{(x+3)(x^2+4)}dx$$

Jmenovatel se už zjednodušit nedá.

$$\frac{4x^2 - 9x + 2}{(x+3)(x^2+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$$

$$x = -3{:}\, A = \frac{36 + 27 + 2}{9 + 4} = \frac{65}{13} = 5$$

Odstraníme zlomky a dopočítáme konstanty B a C.

$$4x^2 - 9x + 2 = 5(x^2+4) + (Bx + C)(x+3)$$

$$-x^2 - 9x - 18 = Bx^2 + x(B + C) + 3C$$

$$-18 = 3C \Rightarrow C = -6, \qquad -1 = B$$

$$\int \frac{4x^2 - 9x + 2}{(x+3)(x^2+4)}dx = \int\left(\frac{5}{x+3} + \frac{-x-6}{x^2+4}\right)dx = \int\left(\frac{5}{x+3} - \frac{x}{x^2+4} - \frac{6}{x^2+2^2}\right)dx$$

$$= \mathbf{5\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - 3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c}$$

4.10.2.3 Opakující se lineární činitel

Pokud se nějaký lineární činitel m-krát opakuje, pak je jej možné na parciální zlomky rozložit takto:

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^m} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(ax+b)^m}.$$

Konstantu A_m určíme v $x = -b/a$. Ostatní konstanty opět najdeme vynásobením obou stran rovnice polynomem ve jmenovateli a následným porovnáním koeficientů u různých mocnin proměnné x.

Řešíme tedy integrály ve tvaru:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = \int (ax+b)^{-n}\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + c = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + c.$$

Příklad 83.

$$\int \frac{2x-5}{x^3+x^2}\,dx = \int \frac{2x-5}{x^2(x+1)}\,dx$$

Lineární člen x se dvakrát opakuje.

$$\frac{2x-5}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$x = -1{:}\, C = \frac{-2-5}{1} = -7, \qquad x = 0{:}\, B = \frac{-5}{1} = -5$$

Dopočítáme konstantu A:

$$2x - 5 = A(x^2 + x) - 5(x+1) - 7x^2$$

$$7x^2 + 7x = Ax^2 + Ax \Rightarrow A = 7.$$

$$= \int \left(\frac{7}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x+1}\right) dx = 7\ln|x| - 5\frac{x^{-1}}{-1} - 7\ln|x+1| + c$$

$$= \mathbf{7\ln|x| - 7\ln|x+1| + \frac{5}{x} + c}$$

Příklad 84.

$$\int \frac{6x^2+31x+45}{x^3+6x^2+9x}\,dx = \int \frac{6x^2+31x+45}{x(x^2+6x+9)}\,dx = \int \frac{6x^2+31x+45}{x(x+3)^2}\,dx$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{6x^2+31x+45}{x(x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}.$$

$$x = 0: A = \frac{45}{3^2} = 5, \qquad x = -3: C = \frac{54 - 93 + 45}{-3} = -2$$

Dopočítáme konstantu B:

$$6x^2 + 31x + 45 = 5(x^2 + 6x + 9) + B(x^2 + 3x) - 2x.$$

Stačí nám porovnat druhé mocniny:

$$6x^2 = 5x^2 + Bx^2 \Rightarrow B = 1.$$

$$= \int \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2}\right) dx = \mathbf{5\,ln}|\boldsymbol{x}| + \mathbf{ln}|\boldsymbol{x}+\mathbf{3}| + \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}} + \boldsymbol{c}$$

4.10.2.4 Opakující se kvadratický činitel

Pokud se nějaký nerozložitelný kvadratický činitel m-krát opakuje, pak je jej možné na parciální zlomky rozložit takto:

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{(ax^2 + bx + c)^m}.$$

Konstanty $A_1,\ B_1, \ldots A_m,\ B_m$ opět spočítáme tak, že obě strany rovnosti vynásobíme polynomem ve jmenovateli a porovnáme koeficienty u různých mocnin proměnné x.

Integrály těchto racionálních funkcí je tedy možné převést na součet integrálů ve tvaru:

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx.$$

Pro $n = 1$ je řešení popsáno výše. Pro $n > 1$ se řešení tohoto integrálu se liší podle toho, zda je konstanta A rovna nule nebo je nenulová. Zaměříme se nejdřív na situaci, kdy je A nula. Řešíme tedy integrály:

$$I_n = \int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} dx.$$

Polynom ve jmenovateli doplníme na úplný čtverec a provedeme substituci za odmocninu z tohoto čtverce. Potřebujeme tedy vyřešit integrál

$$I_n = \int \frac{1}{(u^2 + R^2)^n} du.$$

Pro malé hodnoty n je tento integrál řešitelný goniometrickou substitucí funkce tangens. Pro $n \in \mathbb{Z}$ je efektivnější si odvodit rekurentní vzorec pomocí metody per partes. Poznámka:

$$\frac{d}{du}\frac{1}{(u^2+R^2)^{n-1}} = -(n-1)\frac{1}{(u^2+R^2)^n}2u = -(2n-2)\frac{u}{(u^2+R^2)^n}.$$

$$n > 1:\ I_{n-1} = \int \frac{1}{(u^2+R^2)^{n-1}}du = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & \dfrac{1}{(u^2+R^2)^{n-1}} & \searrow & 1 \\ - & -(2n-2)\dfrac{u}{(u^2+R^2)^n} & \rightarrow & u \end{array} \right|$$

$$= \frac{u}{(u^2+R^2)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{u^2}{(u^2+R^2)^n}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+R^2)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{(u^2+R^2)-R^2}{(u^2+R^2)^n}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+R^2)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{1}{(u^2+R^2)^{n-1}}du - (2n-2)R^2\int \frac{1}{(u^2+R^2)^n}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+R^2)^{n-1}} + (2n-2)I_{n-1} - R^2(2n-2)I_n$$

Máme tedy rovnici:

$$I_{n-1} = \frac{u}{(u^2+R^2)^{n-1}} + (2n-2)I_{n-1} - R^2(2n-2)I_n.$$

$$\Rightarrow R^2(2n-2)I_n = \frac{u}{(u^2+R^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}$$

Dostali jsme tedy rekurentní vztah:

$$\int \frac{1}{(u^2+R^2)^n}du = I_n = \frac{1}{R^2(2n-2)}\cdot\frac{u}{(u^2+R^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{R^2(2n-2)}I_{n-1}.$$

Odvození tohoto rekurentního vztahu je srovnané s jeho odvozením v kurzu *Integrální počet*, který je dostupný na webu *Isibalo*.[34]

[34] Poslední typ s rekurencí. *Isibalo* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://isibalo.com/pdf/video/783a3063d438a597c43e009956ddc19f.pdf

Situaci, kdy konstanta A je nenulová bychom řešili substitucí za kvadratický polynom, který je ve jmenovateli:

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \int \frac{N(2ax+b)+M}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$= \int \frac{N(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}dx + \int \frac{M}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \begin{vmatrix} u = ax^2+bx+c \\ du = (2ax+b)dx \end{vmatrix}$$

$$= N\int \frac{1}{u^n}du + M\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx.$$

První integrál je triviální a pro výpočet druhého integrálu použijeme postup pro případ, kdy je konstanta A je nulová.

Příklad 85. Využití rekurentního vzorce.

$$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^3}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x-2)+8}{(x^2-2x+5)^3}dx$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{(2x-2)}{(x^2-2x+5)^3}dx + \int \frac{8}{(x^2-2x+1+4)^3}dx$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2-2x+5 \\ du = (2x-2)dx \end{vmatrix} = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u^3}du + \int \frac{8}{((x-1)^2+4)^3}dx$$

$$= \frac{5}{2}\frac{u^{-2}}{-2} + c$$

$$+ 8\left(\frac{1}{4(6-2)}\frac{(x-1)}{((x-1)^2+4)^2} + \frac{(6-3)}{4(6-2)}\int \frac{1}{((x-1)^2+4)^2}dx\right)$$

$$= -\frac{5}{4(x^2-2x+5)^2} + \frac{8(x-1)}{16(x^2-2x+5)^2} + c + \frac{24}{16}\int \frac{1}{((x-1)^2+4)^2}dx$$

$$= -\frac{5}{4(x^2-2x+5)^2} + \frac{2(x-1)}{4(x^2-2x+5)^2} + c$$

$$+ \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4(2)}\frac{x-1}{(x-1)^2+4} + \frac{1}{4(2)}\int \frac{1}{(x-1)^2+4}dx\right)$$

$$= \frac{2x-7}{4(x^2-2x+5)^2} + \frac{3(x-1)}{16(x^2-2x+5)} + c + \frac{3}{16}\int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{2x-7}{4(x^2-2x+5)^2} + \frac{3x-3}{16(x^2-2x+5)} + \frac{3}{32}\mathbf{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c}$$

Příklad 86.

$$\int \frac{3x^8}{(x^3-1)(x^6+1)^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^3 \\ du = 3x^2 dx \end{matrix} \right| = \int \frac{u^2}{(u-1)(u^2+1)^2}\,du$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{u^2}{(u-1)(u^2+1)^2} = \frac{A}{u-1} + \frac{Bu+C}{u^2+1} + \frac{Du+E}{(u^2+1)^2}$$

$$u = 1: A = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Ostatní konstanty dopočítáme porovnáním koeficientů.

$$u^2 = A(u^2+1)^2 + (Bu+C)(u-1)(u^2+1) + (Du+E)(u-1)$$

$$u^2 = A(u^4+2u^2+1) + (Bu+C)(u^3+u-u^2-1) + (Du+E)(u-1)$$

Postupně porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin.

$$0u^4 = Au^4 + Bu^4 \Rightarrow B = -A = -\frac{1}{4}$$

$$0u^3 = Cu^3 - Bu^3 \Rightarrow C = B = -\frac{1}{4}$$

$$u^2 = 2Au^2 + Bu^2 - Cu^2 + Du^2 \Rightarrow D = 1 - 2A - B + C = 1 - 2A = \frac{1}{2}$$

$$0 = A - C - E \Rightarrow E = A - C = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Takže:

$$\frac{u^2}{(u-1)(u^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{4}u - \frac{1}{4}}{u^2+1} + \frac{\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{u+1}{u^2+1} + \frac{2u+2}{(u^2+1)^2}\right).$$

Nyní tento integrál můžeme vyřešit.

$$\int \frac{3x^8}{(x^3-1)(x^6+1)^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^3 \\ du = 3x^2 dx \end{matrix} \right| = \int \frac{u^2}{(u-1)(u^2+1)^2}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{u+1}{u^2+1} + \frac{2u+2}{(u^2+1)^2}\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{u}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1} + \frac{2u}{(u^2+1)^2} + \frac{2}{(u^2+1)^2}\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| - \operatorname{arctg} u\right) + c + \frac{1}{4}\int \frac{2u}{(u^2+1)^2}\, du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\, du$$

$$= \left|\begin{matrix} v = u^2+1 \\ dv = 2u\, du \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} u = \operatorname{tg}\theta \\ du = \sec^2\theta\, d\theta \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| - \operatorname{arctg} u\right) + c + \frac{1}{4}\int \frac{1}{v^2}\, dv + \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| - \operatorname{arctg} u\right) + c + \frac{1}{4}\frac{v^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| - \operatorname{arctg} u\right) - \frac{1}{4(u^2+1)} + c + \frac{1}{4}\int (1+\cos(2\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| - \operatorname{arctg} u - \frac{1}{u^2+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + c$$

$$= \left|\begin{matrix} \operatorname{tg}\theta = u \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} u \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{u}{1} = \frac{protilehl\acute{a}}{p\check{r}ilehl\acute{a}} \Rightarrow PV\!: p\check{r}epona = \sqrt{u^2+1} \\ \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \sin\theta\cos\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{u}{u^2+1} \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| - \operatorname{arctg} u - \frac{1}{u^2+1} + \operatorname{arctg} u + \frac{u}{u^2+1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u^2+1| + \frac{u-1}{u^2+1}\right) + c$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\ln|x^3-1| - \frac{1}{8}\ln|x^6+1| + \frac{x^3-1}{4(x^6+1)} + c}$$

4.11 Racionalizace integrálu

V tomto oddílu jsem vycházel převážně ze článku zveřejněném na *Wikipedii*[35] a z kurzu *Integrální počet*, který je dostupný na webu *Isibalo*.[36]

Cílem této metody je převést integrál více funkcí na integrál racionální funkce. K integrandu se chováme jako k racionální funkci dvou proměnných $R(x, y)$, přičemž proměnná y je funkcí proměnné x a cílem je převést jej na racionální funkci jedné proměnné $R(u)$. Racionalizaci provádíme vhodnou substitucí. Racionalizaci lze provést pouze pro určité typy integrandů.

4.11.1 Weierstrassova substituce

Integrál libovolné racionální funkce v rámci funkcí sinus a kosinus lze vyřešit substitucí za tangens poloviny integrační proměnné. Této substituci se říká Weierstrassova.

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \left| u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| = \int R(u)\, du$$

Abychom tuto substituci mohli použít, tak si musíme dopočítat $\sin x$, $\cos x$ a dx.

$$u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} u \Rightarrow \boldsymbol{dx = \frac{2}{1+u^2} du}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{1} = \frac{protilehlá}{přilehlá} \Rightarrow přepona = \sqrt{u^2+1} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \end{cases}$$

$$\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \Rightarrow \boldsymbol{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}}$$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{u^2+1} - \frac{u^2}{u^2+1} \Rightarrow \boldsymbol{\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

---

[35] Primitivní funkce. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Primitivn%C3%AD_funkce

[36] Integrální počet (integrace). *Isibalo* [online]. [cit. 2021-12-19]. Dostupné z: https://isibalo.com/matematika/integralni-pocet-integrace

Příklad 87.

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\,dx = \left|u = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{1+u^2}{1+u^2}}\,du = \int \frac{2}{2u+2}\,du$$

$$= \int \frac{1}{u+1}\,du = \ln|u+1| + c = \mathbf{ln}\left|\mathbf{tg}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right) + \mathbf{1}\right| + \boldsymbol{c}$$

Výrazy získané touto substitucí jsou ale většinou poměrně složité, takže se snažíme použít jednodušší substituci za jinou goniometrickou funkci. Níže jsou uvedeny tři jednodušší substituce, které lze použít, pokud má funkce R určitou paritu.

Pokud je funkce R lichá v proměnné $\sin x$, pak lze substituovat za kosinus.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow u = \cos x$$

Pokud je funkce R lichá v proměnné $\cos x$, pak lze substituovat za sinus.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow u = \sin x$$

Pokud je funkce R sudá v obou svých proměnných, pak lze substituovat za tangens.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow u = \operatorname{tg} x$$

Příklad 88.

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\,dx = \left|\begin{matrix} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{u^2 - 5u + 6}\,du = \int \frac{1}{(u-2)(u-3)}\,du$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{1}{(u-2)(u-3)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u-3} = \left|\begin{matrix} u = 2: A = \frac{1}{2-3} = -1 \\ u = 3: B = \frac{1}{3-2} = 1 \end{matrix}\right| = -\frac{1}{u-2} + \frac{1}{u-3}$$

Pokračujeme v integraci.

$$= \int \left(\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u-2}\right)du = \ln|u-3| - \ln|u-2| + c$$

$$= \mathbf{ln}|\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} - \mathbf{3}| - \mathbf{ln}|\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| + \boldsymbol{c}$$

Příklad 89.

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x - 8}\,dx$$

Můžeme provést substituci za tangens, protože:

$$\frac{1}{2\sin^2(-x) - 8} = \frac{1}{2\sin^2 x - 8}.$$

Budeme muset využít pravoúhlý trojúhelník k dopočítání hodnoty funkce sinus.

$$\int \frac{1}{2\sin^2 x - 8}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{tg} x \Rightarrow \dfrac{protilehlá}{přilehlá} = \dfrac{u}{1} \\ přepona = \sqrt{u^2+1} \Rightarrow \sin x = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}} \\ x = \operatorname{arctg} u \Rightarrow dx = \dfrac{1}{u^2+1}\,du \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{u^2+1}}{2\frac{u^2}{u^2+1} - 8}\,du$$

$$= \int \frac{1}{2u^2 - 8(u^2+1)}\,du = \int \frac{1}{-6u^2 - 8}\,du = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2 + \frac{8}{6}}\,du$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,du = -\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) + c$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{12}\,\mathbf{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{c}$$

4.11.2 Více různých odmocnin ze stejného výrazu

Pokud se v integrandu objevuje více různých odmocnin ze stejného výrazu, tedy:

$$\int R\left(x, \sqrt[k_1]{f(x)}, \sqrt[k_2]{f(x)}, \dots \sqrt[k_n]{f(x)}\right) dx.$$

Pak nejdeme nejmenší společný násobek odmocnitelů $k_1, k_2, \dots k_n$:

$$s = NSN(k_1, k_2, \dots k_n).$$

A provedeme substituci za s-tou odmocninu z daného výrazu:

$$u = \sqrt[s]{f(x)}.$$

Příklad 90.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt[6]{x} \\ x = u^6 \\ dx = 6u^5 du \end{matrix} \right| = \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,du = 6\int \frac{u^3}{u+1}\,du = 6\int \frac{(u^3+1)-1}{u+1}\,du$$

$$= 6\int \frac{(u+1)(u^2-u+1)-1}{u+1}\,du = 6\int \left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= 6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln|u+1|\right)+c$$

$$= \mathbf{2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+c}$$

Příklad 91.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt[3]{x}+1 \\ x = (u-1)^3 \\ dx = 3(u-1)^2 du \end{matrix} \right| = \int \frac{3(u-1)^2}{u}\,du = 3\int \frac{u^2-2u+1}{u}\,du$$

$$= 3\int \left(u-2+\frac{1}{u}\right)du = 3\left(\frac{u^2}{2}-2u+\ln|u|\right)+c$$

$$= \mathbf{\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2-6\left(\sqrt[3]{x}+1\right)+3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+c}$$

4.11.3 Odmocnina z lineárního lomeného výrazu

Integrál obsahující n-tou odmocninu daného lineárního lomeného výrazu lze vyřešit substitucí za tuto odmocninu.

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \left| u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right| = \int R(u)\,du$$

Příklad 92. Lomený výraz není kompletní.

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt{x+4} \\ x = u^2-4 \\ dx = 2u\,du \end{matrix} \right| = \int \frac{u}{u^2-4}2u\,du = \int \frac{2u^2-8+8}{u^2-4}\,du$$

$$= \int \left(2+\frac{8}{u^2-4}\right)du = 2\int \left(1+\frac{4}{(u-2)(u+2)}\right)du$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{4}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2} = \left| \begin{array}{c} u = 2\colon A = \dfrac{4}{2+2} = 1 \\ u = -2\colon B = \dfrac{4}{-2-2} = -1 \end{array} \right| = \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}$$

Pokračujeme v integraci.

$$= 2\int \left(1 + \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right) du = 2(u + \ln|u-2| - \ln|u+2|) + c$$

$$= \mathbf{2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\sqrt{x+4} - 2\right| - 2\ln\left|\sqrt{x+4} + 2\right| + c}$$

Příklad 93. Lomený výraz je kompletní.

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} \Rightarrow u^2 = \dfrac{x+1}{1-x} \Rightarrow u^2 - xu^2 = x+1 \\ x + xu^2 = u^2 - 1 \Rightarrow x(1+u^2) = u^2 - 1 \Rightarrow x = \dfrac{u^2-1}{u^2+1} \\ dx = \dfrac{2u(u^2+1) - 2u(u^2-1)}{(u^2+1)^2}du = \dfrac{4u}{(u^2+1)^2}du \\ (x-1)^2 = \left(\dfrac{u^2-1}{u^2+1} - \dfrac{u^2+1}{u^2+1}\right)^2 = \left(\dfrac{-2}{u^2+1}\right)^2 = \dfrac{4}{(u^2+1)^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{(u^2+1)^2}{4} u \frac{4u}{(u^2+1)^2} du = \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + c = \mathbf{\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^3} + c}$$

4.11.4 Odmocnina z kvadratického výrazu

4.11.4.1 Řešení pomocí doplnění na úplný čtverec

V tomto oddílu jsem vycházel ze článku zveřejněném na webu *Math24*.[37]

Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

lze doplněním na úplný čtverec a substitucí za odmocninu z tohoto čtverce převést na jeden z následujících integrálů:

[37] Trigonometric and Hyperbolic Substitutions. *Math24* [online]. [cit. 2022-01-02]. Dostupné z: https://math24.net/trigonometric-hyperbolic-substitutions.html

$$\int R\left(u, \sqrt{u^2 + r^2}\right) du, \qquad \int R\left(u, \sqrt{u^2 - r^2}\right) du, \qquad \int R\left(u, \sqrt{r^2 - u^2}\right) du.$$

Tyto integrály lze vyřešit správnou goniometrickou nebo hyperbolickou substitucí.

Příklad 94.

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx = \left| \begin{array}{r} 8 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 8) = -(x^2 + 2x + 1 - 9) \\ = -((x+1)^2 - 9) = 9 - (x+1)^2 \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{x-2}{\sqrt{9-(x+1)^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x + 1 = 3\sin\theta \\ x = 3\sin\theta - 1 \\ dx = 3\cos\theta\, d\theta \end{array} \right| = \int \frac{3\sin\theta - 3}{\sqrt{9 - 9\sin^2\theta}} 3\cos\theta\, d\theta$$

$$= 9\int \frac{(\sin\theta - 1)\cos\theta}{\sqrt{9\cos^2\theta}} d\theta = 3\int (\sin\theta - 1)\, d\theta = 3(-\cos\theta - \theta) + c$$

$$= -3\cos\theta - 3\theta = \left| \begin{array}{c} \sin\theta = \dfrac{x+1}{3} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{3}\right) \\ \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{protilehlá}{přepona} \Rightarrow přilehlá = \sqrt{9-(x+1)^2} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{9-(x+1)^2}}{3} = \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{3} \end{array} \right|$$

$$= \boldsymbol{-\sqrt{8-2x-x^2} - 3\arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right) + c}$$

4.11.4.2 Eulerovy substituce

V tomto oddílu jsem vycházel převážně ze článku zveřejněném na *Wikipedii*.[38]

Řešení pomocí doplnění na úplný čtverec může být velmi zdlouhavé. Po použití goniometrické substituce převedeme integrál ve tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

na integrál ve tvaru

$$\int R(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta.$$

[38] Euler substitucion. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_substitution

K racionalizaci tohoto integrálu je nutné další substituce. K vrácení se z těchto substitucí budeme muset využívat vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku. Eulerovy substituce nám umožňují provést racionalizaci během jednoho kroku a snadný návrat se substituce.

Integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

lze zracionalizovat pomocí tří Eulerových substitucí.

Pro $a > 0$ lze provést racionalizaci substitucí:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x \pm u.$$

Pro $c > 0$ lze provést racionalizaci substitucí:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = ux \pm \sqrt{c}.$$

Pro $a < 0$ a výraz $ax^2 + bx + c$ bez reálných kořenů se parabola $y = ax^2 + bx + c$ nachází pod osou x, takže definiční obor výrazu $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ je množina prázdná. O integrálu tohoto výrazu tedy nemá cenu se bavit.

Pro $a < 0$ a pro reálné kořeny $\alpha, \beta;\ \alpha < \beta$ výraz nejprve upravíme:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{a(x-\alpha)^2 \frac{(x-\beta)}{(x-\alpha)}} = |x-\alpha| \sqrt{a \frac{x-\beta}{x-\alpha}}.$$

Z předpokladů plyne, že parabola $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ je obrácená dolů a protíná osu x v bodech $x = \alpha$ a $x = \beta$. Takže výraz $ax^2 + bx + c$ nabývá nezáporných hodnot na uzavřeném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Definičním oborem výrazu $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ tedy je $\langle \alpha, \beta \rangle$ a pro všechna x z tohoto intervalu je výraz $x - \alpha$ nezáporný. Na tomto intervalu tedy platí:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x-\alpha) \sqrt{a \frac{x-\beta}{x-\alpha}}.$$

Pod odmocninou je lineární lomený výraz, takže racionalizaci lze provést substitucí:

$$u = \sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}.$$

Příklad 95. Kvadratický výraz bez reálných kořenů. V tomto příkladu použijeme výsledek z příkladu 77:

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2+x+1} = x+u \\ x^2+x+1 = x^2+2ux+u^2 \Rightarrow x-2ux = u^2-1 \\ x = \dfrac{u^2-1}{1-2u} \\ dx = \dfrac{2u(1-2u)-(-2)(u^2-1)}{(1-2u)^2}du = \dfrac{2u-4u^2+2u^2-2}{(1-2u)^2}du \\ \sqrt{x^2+x+1} = x+u = \dfrac{u^2-1}{1-2u} + u\dfrac{1-2u}{1-2u} = \dfrac{u^2-1+u-2u^2}{1-2u} \\ dx = \dfrac{2(u-u^2-1)}{(1-2u)^2}du, \qquad x+u = \dfrac{u-u^2-1}{1-2u} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{1}{x}\frac{1}{x+u}dx = \int \frac{1-2u}{u^2-1}\frac{1-2u}{u-u^2-1}\frac{2(u-u^2-1)}{(1-2u)^2}du = \int \frac{2}{u^2-1}du$$

$$= 2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c = \mathbf{ln}\left|\frac{\sqrt{\boldsymbol{x^2+x+1}}-\boldsymbol{x}-\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+x+1}}-\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}\right| + \boldsymbol{c}$$

4.11.5 Odmocniny z ostatních výrazů

Pokud se v integrandu objevuje odmocnina, pak provedeme substituci za tuto odmocninu.

Příklad 96. V tomto příkladu použijeme výsledek z příkladu 77:

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$$

$$\int \sqrt{e^x+1}\,dx = \left| \begin{array}{c} u=\sqrt{e^x+1} \Rightarrow e^x = u^2-1 \\ du = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\,dx \\ dx = \dfrac{2\sqrt{e^x+1}}{e^x}\,du = \dfrac{2u}{u^2-1}\,du \end{array} \right| = \int u\frac{2u}{u^2-1}\,du = 2\int \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,du$$

$$= 2\int \left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du = 2\left(u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)+c$$

$$= \mathbf{2\sqrt{e^x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c}$$

Příklad 97.

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} u=\sqrt{x} \\ x=u^2 \\ dx = 2u\,du \end{array} \right| = \int e^u 2u\,du = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & 2u & \searrow & e^u \\ - & 2 & \searrow & e^u \\ + & 0 & \rightarrow & e^u \end{array} \right| = 2ue^u - 2e^u + c$$

$$= \mathbf{2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c}$$

Příklad 98.

$$\int \arcsin(\sqrt{x})\,dx = \left| \begin{array}{c} u=\sqrt{x} \\ x=u^2 \\ dx = 2u\,du \end{array} \right| = \int \arcsin(u)\,2u\,du = \left| \begin{array}{cccc} & D & & I \\ + & \arcsin u & \searrow & 2u \\ - & \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} & \rightarrow & u^2 \end{array} \right|$$

$$= u^2\arcsin u - \int \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \left| \begin{array}{c} u=\sin\theta \\ du = \cos\theta\,d\theta \end{array} \right|$$

$$= u^2\arcsin u - \int \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta = u^2\arcsin u - \int \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= u^2\arcsin u - \int \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))\,d\theta$$

$$= u^2\arcsin u - \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)+c = u^2\arcsin u - \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)+c$$

$$= \left| \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) = \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta = u \Rightarrow \theta = \arcsin u \\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-u^2} \end{array} & \dfrac{1}{2}\sin(2\theta) = u\sqrt{1-u^2} = \sqrt{u^2-u^4} \end{array} \right|$$

$$= u^2\arcsin u - \frac{1}{2}\arcsin u + \frac{1}{2}\sqrt{u^2-u^4}+c$$

$$= \boldsymbol{x\arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+c}$$

Příklad 99. V tomto příkladu použijeme derivaci hyperbolometrického tangens:

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\int \sqrt{\tanh x}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{\tanh x} \\ x = \tanh^{-1}(u^2) \\ dx = \dfrac{1}{1-u^4} 2u\, du \end{array} \right| = \int u \frac{1}{1-u^4} 2u\, du = \int \frac{2u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} du$$

$$= \int \frac{u^2-1+u^2+1}{(1-u^2)(1+u^2)} du = \int \left(\frac{u^2-1}{(1-u^2)(1+u^2)} + \frac{u^2+1}{(1-u^2)(1+u^2)} \right) du$$

$$= \int \left(-\frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{1-u^2} \right) du = -\operatorname{arctg} u + \tanh^{-1}(u) + c$$

$$= \boldsymbol{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\tanh x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tanh x}\right) + c}$$

Příklad 100.

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin(2x)} dx = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{\operatorname{tg} x} \\ du = \dfrac{\sec^2 x}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx = \dfrac{\sec^2 x}{2u} dx \\ dx = \dfrac{2u}{\sec^2 x} du \end{array} \right| = \int \frac{u}{2 \sin x \cos x} \cdot \frac{2u}{\sec^2 x} du$$

$$= \int u^2 \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} du = \int u^2 \operatorname{cotg} x\, du = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{\operatorname{tg} x} \\ \operatorname{tg} x = u^2 \\ \operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{u^2} \end{array} \right| = \int u^2 \frac{1}{u^2} du$$

$$= u + c = \boldsymbol{\sqrt{\operatorname{tg} x} + c}$$

Příklad 101.

$$\int \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\, dx = \left| \begin{matrix} u = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} \\ x = \operatorname{arctg}(u^3) \\ dx = \dfrac{3u^2}{1+u^6} du \end{matrix} \right| = \int \frac{3u^3}{1+u^6} du = 3\int \frac{uu^2}{1+(u^2)^3} du = \left| \begin{matrix} t = u^2 \\ dt = 2u\, du \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{t}{1+t^3} dt = \frac{3}{2}\int \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} dt$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky.

$$\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

$$t = -1 \colon A = -\frac{1}{1+1+1} = -\frac{1}{3}$$

$$t = A(t^2-t+1) + (Bt+C)(t+1)$$

Porovnáme koeficienty u t^2:

$$0 = A + B \Rightarrow B = -A = \frac{1}{3}.$$

Porovnáme konstanty:

$$0 = A + C \Rightarrow C = -A = \frac{1}{3}.$$

Takže:

$$\frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}}{t^2-t+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1}\right)$$

Můžeme pokračovat v integraci.

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1}\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + c + \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dt = \begin{vmatrix} v = t - \frac{1}{2} \\ dv = dt \\ t+1 = v + \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + c + \frac{1}{2}\int \frac{v+\frac{3}{2}}{v^2+\frac{3}{4}}\,dv$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + c + \frac{1}{2}\int \frac{v}{v^2+\frac{3}{4}}\,dv + \frac{3}{4}\int \frac{1}{v^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dv$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\ln\left|v^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}v\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\ln\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{4}\ln(t^2-t+1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= \left|t = u^2 = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}\right|$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}+1\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}-1}{\sqrt{3}}\right) + c}$$

Příklad 102. Nestandardní řešení integrálu racionální funkce.

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{\operatorname{tg} x} \Rightarrow u^2 = \operatorname{tg} x \Rightarrow 2u\,du = \sec^2 x\,dx \\ dx = \frac{2u}{\sec^2 x}du = dx = \frac{2u}{\operatorname{tg}^2 x + 1}du = \frac{2u}{u^4+1}du \end{vmatrix} = \int \frac{2u^2}{u^4+1}\,du$$

$$= \int \frac{2}{u^2+u^{-2}}\,du = \begin{vmatrix} u^2+u^{-2} = u^2+u^{-2}+2uu^{-1}-2uu^{-1} \\ u^2+u^{-2} = (u+u^{-1})^2 - 2 = (u-u^{-1})^2 + 2 \end{vmatrix}$$

$$= \int \frac{2}{(u+u^{-1})^2-2}\,du$$

Kdyby v čitateli byla derivace $(u+u^{-1})$, tak bychom mohli provést substituci.

Pozn.: $\frac{d}{du}(u+u^{-1}) = 1-u^{-2},\ \frac{d}{du}(u-u^{-1}) = 1+u^{-2}.$

$$= \int \frac{2}{u^2+u^{-2}}\,du = \int \left(\frac{1-u^{-2}}{u^2+u^{-2}} + \frac{1+u^{-2}}{u^2+u^{-2}}\right) du$$

$$= \int \frac{1-u^{-2}}{(u+u^{-1})^2-2}\,du + \int \frac{1+u^{-2}}{(u-u^{-1})^2+2}\,du = \begin{vmatrix} v = u+u^{-1} \\ dv = (1-u^{-2})du \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} w = u-u^{-1} \\ dw = (1+u^{-2})du \end{vmatrix} = \int \frac{1}{v^2-2}\,dv + \int \frac{1}{w^2+2}\,dw$$

$$= \begin{vmatrix} v = \sqrt{2}\coth\theta \\ dv = -\sqrt{2}\,\mathrm{csch}^2\,\theta\, d\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w = \sqrt{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi \\ dw = -\sqrt{2}\csc^2\varphi\, d\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \int \frac{-\sqrt{2}\,\mathrm{csch}^2\,\theta}{2(\coth^2\theta - 1)}\,d\theta + \int \frac{-\sqrt{2}\csc^2\varphi}{2(\mathrm{cotg}^2\,\varphi + 1)}\,d\varphi$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{csch}^2\,\theta}{\mathrm{csch}^2\,\theta}\,d\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\csc^2\varphi}{\csc^2\varphi}\,d\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi + c$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\coth^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cotg}^{-1}\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Hyperbolometrický kotangens proměnné x je definovaný pouze pro $|x| > 1$, měli bychom tedy zkontrolovat hodnoty výrazu $v/\sqrt{2}$. Využijeme známou nerovnost:

Pro $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + 1/x \geq 2$. Tuto nerovnost lze dokázat např. pomocí AG nerovnosti.

$$v = u + \frac{1}{u} \Rightarrow u \neq 0 \Rightarrow \sqrt{\mathrm{tg}\,x} \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\mathrm{tg}\,x} > 0 \Rightarrow v = u + \frac{1}{u} \geq 2 \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} > 1$$

Tento integrál je tedy definovaný pro $\mathrm{tg}\,x > 0$, tedy pro $x \in \{(k\pi,\ k\pi + \pi/2) | k \in \mathbb{Z}\}$.

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\coth^{-1}\left(\frac{u+u^{-1}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cotg}^{-1}\left(\frac{u-u^{-1}}{\sqrt{2}}\right) + c = \begin{vmatrix} u = \sqrt{\mathrm{tg}\,x} \\ u^{-1} = \sqrt{\mathrm{cotg}\,x} \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}\coth^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x} + \sqrt{\mathrm{cotg}\,x}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cotg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{tg}\,x} - \sqrt{\mathrm{cotg}\,x}}{\sqrt{2}}\right) + c}$$

Příklad 103. Trigonometrická substituce a rozklad na parciální zlomky.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}\,dx = \left|\begin{matrix} x = \sec\theta \\ dx = \sec\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta \end{matrix}\right| = \int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{(\sec^2\theta+1)\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta}{\sec^2\theta + 1}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{1+1-\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= \left|\begin{matrix} u = \sin\theta \\ du = \cos\theta\, d\theta \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{2-u^2}\,du = \int \left(\frac{A}{\sqrt{2}-u} + \frac{B}{\sqrt{2}+u}\right) du$$

$$= \left|\begin{matrix} u = \sqrt{2}: A = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ u = -\sqrt{2}: B = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{matrix}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u}\right) du =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\ln\left|\sqrt{2}-u\right| + \ln\left|\sqrt{2}+u\right|\right) + c = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sin\theta + \sqrt{2}}{\sin\theta - \sqrt{2}}\right| + c = \left|\begin{matrix} \sec\theta = \dfrac{x}{1} = \dfrac{p\check{r}epona}{p\check{r}ilehl\acute{a}} \\ \Rightarrow protilehl\acute{a} = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \sqrt{2}}\right| + c = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1} - x\sqrt{2}}\right| + c}$$

Příklad 104. V tomto příkladu využijeme následujícího vztahu:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \Rightarrow \frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}.$$

$$\int \ln\left|x + \sqrt{1-x}\right| dx = \left|\begin{matrix} & D & & I \\ + & \ln\left|x+\sqrt{1-x}\right| & \searrow & 1 \\ - & \dfrac{1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{x+\sqrt{1-x}} & \rightarrow & x \end{matrix}\right| = \left|x\ln\left|x+\sqrt{1-x}\right| = R\right|$$

$$= R - \int \frac{x - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}}}{x+\sqrt{1-x}}\,dx = \left|\begin{matrix} u = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1-u^2 \\ dx = -2u\,du \end{matrix}\right|$$

$$= R - \int \frac{1 - u^2 - \frac{1-u^2}{2u}}{1 - u^2 + u}(-2u)\,du = R + \int \frac{2u - 2u^3 - 1 + u^2}{1 - u^2 + u}\,du$$

$$= R + \int \frac{2u^3 - u^2 - 2u + 1}{u^2 - u - 1}\,du$$

Po dělení mnohočlenu mnohočlenem dostaneme:

$$\frac{2u^3 - u^2 - 2u + 1}{u^2 - u - 1} = 2u + 1 + \frac{u + 2}{u^2 - u - 1}.$$

$$= R + \int (2u + 1)\,du + \int \frac{u + 2}{u^2 - u - 1}\,du = \left| \begin{array}{c} u^2 - u - 1 = 0 \\ u_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \\ u_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \phi \end{array} \right|$$

$$= R + u^2 + u + c_1 + \int \frac{u + 2}{(u - \varphi)(u - \phi)}\,du$$

$$= R + u^2 + u + c_1 + \int \left(\frac{A}{u - \varphi} + \frac{B}{u - \phi}\right) du$$

$$= \left| \begin{array}{c} \varphi - \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \\ u = \varphi : A = \frac{\varphi + 2}{\varphi - \phi} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{4}{2}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi \\ u = \phi : B = \frac{\phi + 2}{\phi - \varphi} = \frac{1}{-\sqrt{5}}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{4}{2}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{-2} = \phi \end{array} \right|$$

$$= R + u^2 + u + c_1 + \int \left(\frac{\varphi}{u - \varphi} + \frac{\phi}{u - \phi}\right) du$$

$$= R + u^2 + u + \varphi \ln|u - \varphi| + \phi \ln|u - \phi| + c_2$$

$$= x \ln\left|x + \sqrt{1 - x}\right| + 1 - x + \sqrt{1 - x} + \varphi \ln|u - \varphi| + \phi \ln|u - \phi| + c_2$$

$$= \boldsymbol{x \ln\left|x + \sqrt{1 - x}\right| + \varphi \ln\left|\sqrt{1 - x} - \varphi\right| + \phi \ln\left|\sqrt{1 - x} - \phi\right| - x + \sqrt{1 - x} + c}$$

Závěr

Ve své seminární práci jsem se věnoval neurčitému integrálu a integračním metodám. Z důvodu široké obsáhlosti tématu integračního počtu jsem se nevěnoval určitému integrálu, který jsem původně měl v plánu zahrnout.

Práce obsahuje popisy všech základních integračních metod, které jsou doplněny řešenými příklady různých obtížností. V práci se mimo jiné pracuje s hyperbolickými a hyperbolometrický funkcemi, které se běžně na SŠ neučí, takže je také bylo nutné zpracovat.

Ve své práci jsem se snažil z počátku řešit snadné příklady a postupně zvyšovat jejich obtížnost. Myslím, že se mi povedlo ukázat řešení několika opravdu obtížných a z mého pohledu zajímavých příkladů. Také jsem se snažil prezentovat některé obtížně vypadající příklady, které lze krásně zjednodušit, a naopak některé snadno vypadající příklady, jejichž řešení je ale velmi obtížné.

Při zpracovávání této práce jsem si připomněl a prohloubil své znalosti integračních metod, zejména rozkladu na parciální zlomky a racionalizace integrálu. Také jsem se naučil formální definice těchto metod, které jsem předtím neznal. Díky této práci jsem se naučil pracovat s hyperbolickými a hyperbolometrickými funkcemi, což považuji za užitečné do budoucna. Také jsem se naučil, jak správně psát citace a jak uvádět zdroje.

Seznam příkladů

1. $\int \frac{x^2-4x+4}{4x^3-2x^4}\,dx = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + c$

2. $\int \frac{1}{1+\cos 2x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c$

3. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x + c$

4. $\int 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx = x - \sin x + c$

5. $\int 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2x + 2\sin x + c$

6. $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - x + c$

7. $\int \frac{3^{x+1} + 9\left(\frac{9}{2}\right)^{x-1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^x}\,dx = 3\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + 2\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + c$

8. $\int x^{\frac{x}{\ln x}}\,dx = x^{\frac{x}{\ln x}} + c = e^x + c$

9. $\int \sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\ln|x| + c$

10. $\int \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x\cos x\right)dx = \ln x\sin x + c$

11. $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx = \frac{e^{2x}}{4(1+2x)} + c$

12. $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$

13. $\int x^3\ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$

14. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

15. $\int x^3\sin x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + c$

16. $\int x\sec x\tan x\,dx = x\sec x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$

17. $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

18. $\int \ln^2(x) \, dx = x \ln^2(x) - 2x \ln x + 2x + c$

19. $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$

20. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + c$

21. $\int \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) dx = (x+2) \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+1}\right) - \sqrt{x+1} + c$

22. $\int \sinh^{-1} x \, dx = \begin{cases} x \sinh^{-1} x - \sqrt{1 + x^2} + c \\ x \sinh^{-1} x - \cosh(\sinh^{-1} x) + c \end{cases}$

23. $\int e^x \sin(2x) \, dx = \frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x) + c$

24. $\int 2e^x x \sin x \, dx = e^x x \sin x - e^x x \cos x + e^x \cos x + c$

25. $\int \sec^{\mathrm{n}}(x) \, dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}(x) \sec^{\mathrm{n}-2}(x) + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{\mathrm{n}-2}(x) \, dx$

26. $\int \frac{x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$

27. $\int \frac{x^3}{1 + x^4} dx = \frac{1}{4} \ln(1 + x^4) + c$

28. $\int \frac{x}{1 + x^4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) + c$

29. $\int \frac{1}{(5x-2)^4} dx = -\frac{1}{15(5x-2)^3} + c$

30. $\int \cos(3x - 2) \, dx = \frac{1}{3} \sin(3x - 2) + c$

31. $\int \frac{1}{1 - 5x} dx = -\frac{1}{5} \ln|5x - 1| + c$

32. $\int \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}} \, dx = \frac{1}{2x} + \frac{1}{12} \sqrt{(4x+1)^3} + c$

33. $\int \frac{1}{x^4 + x} dx = \ln|x| - \frac{1}{3} \ln|x^3 + 1| + c$

34. $\int \frac{1}{x(1 + x^2)} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$

35. $\int 4x^3 \sec^2(x^4)\, dx = \operatorname{tg}(x^4) + c$

36. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sqrt{1+x^2} + c$

37. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

38. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+10}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+10)^2} + c$

39. $\int x^2\sqrt{x+4}\, dx = \frac{2}{7}\sqrt{(x+4)^7} - \frac{16}{5}\sqrt{(x+4)^5} + \frac{32}{3}\sqrt{(x+4)^3} + c$

40. $\int x^3\sqrt{x^2+3}\, dx = \frac{1}{5}\sqrt{(x^2+3)^5} - \sqrt{(x^2+3)^3} + c$

41. $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}\, dx = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + c$

42. $\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

43. $\int \sin x \sqrt{\cos x + \frac{\pi}{2}}\, dx = -\frac{2}{3}\sqrt{\left(\cos x + \frac{\pi}{2}\right)^3} + c$

44. $\int \operatorname{tg} x\, dx = \begin{cases} \ln|\sec x| + c \\ -\ln|\cos x| + c \end{cases}$

45. $\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x)\, dx = -\frac{1}{2}\ln^2(\cos x) + c$

46. $\int \sec^4 x\, dx = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + c$

47. $\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$

48. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\sec x| + c$

49. $\int \sec^4 x \operatorname{tg} x\, dx = \begin{cases} \frac{1}{4}\sec^4 x + c_1 \\ \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + c_2 \end{cases}$

50. $\int \csc^4 x \operatorname{cotg} x\, dx = -\frac{1}{4}\csc^4 x + c$

51. $\int \frac{e^{\operatorname{cotg} x}}{1-\cos^2 x}\, dx = -e^{\operatorname{cotg} x} + c$

52. $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx = \ln|\cos x + \sin x| + c$

53. $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$

54. $\displaystyle\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x + \operatorname{cotg} x| + c$

55. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\sinh x) + c_1 \\ 2\operatorname{arctg}(e^x) + c_2 \end{cases}$

56. $\displaystyle\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{1}{2}x + c$

57. $\displaystyle\int \sinh^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + c$

58. $\displaystyle\int \tanh x\,dx = \ln(\cosh x) + c$

59. $\displaystyle\int \arccos x\,dx = \begin{cases} x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c \\ x\arccos x - \sin(\arccos x) + c \end{cases}$

60. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin^2 x + c$

61. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c$

62. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = x - \ln(1+e^x) + c$

63. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-\ln^2(x)}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(\ln x) + \frac{1}{2}\ln(x)\sqrt{1-\ln^2(x)} + c$

64. $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\sin^2(\ln x))}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}\operatorname{tg}(\ln x)\big) + c$

65. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$

66. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a}{x}-1}\,dx = a\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right) + \sqrt{x(a-x)} + c$

67. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+25)^3}}\,dx = \frac{x}{25\sqrt{x^2+25}} + c$

68. $\displaystyle\int \frac{x^8}{(x^6+1)^2}\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^3) - \frac{x^3}{6(x^6+1)} + c$

69. $\int x^2\sqrt{x^2+3}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{8}x(2x^2+3)\sqrt{x^2+3} - \frac{9}{8}\sinh^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c_1 \\ \frac{1}{8}x(2x^2+3)\sqrt{x^2+3} - \frac{9}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) + c_2 \end{cases}$

70. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{x}\right) + c$

71. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx = \sqrt{1-x^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + c$

72. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx = \begin{cases} \sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + c_1 \\ \ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) - \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + c_2 \end{cases}$

73. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c_1 \\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + c_2 \end{cases}$

74. $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

75. $\int \frac{x}{ax^2+b}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + c$

76. $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

77. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

78. $\int \frac{8x-17}{x^2-5x+4}dx = 3\ln|x-1| + 5\ln|x-4| + c$

79. $\int \frac{6x+14}{x^2+6x+13}dx = 3\ln|x^2+6x+13| - 2\,\text{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + c$

80. $\int \frac{2x^2+8x+5}{x^2+4x+13}dx = 2x - 7\,\text{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$

81. $\int \frac{x-1}{x^4-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + c$

82. $\int \frac{4x^2-9x+2}{(x+3)(x^2+4)}dx = 5\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - 3\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

83. $\int \frac{2x-5}{x^3+x^2}dx = 7\ln|x| - 7\ln|x+1| + \frac{5}{x} + c$

84. $\int \frac{6x^2+31x+45}{x^3+6x^2+9x}dx = 5\ln|x| + \ln|x+3| + \frac{2}{x+3} + c$

85. $\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^3}\,dx = \frac{2x-7}{4(x^2-2x+5)^2} + \frac{3x-3}{16(x^2-2x+5)} + \frac{3}{32}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$

86. $\int \frac{3x^8}{(x^3-1)(x^6+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x^3-1| - \frac{1}{8}\ln|x^6+1| + \frac{x^3-1}{4(x^6+1)} + c$

87. $\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right| + c$

88. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6}\,dx = \ln|\sin x - 3| - \ln|\sin x - 2| + c$

89. $\int \frac{1}{2\sin^2 x - 8}\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} x\right) + c$

90. $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + c$

91. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 1}\,dx = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)^2 - 6\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) + 3\ln\left|\sqrt[3]{x} + 1\right| + c$

92. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\sqrt{x+4} - 2\right| - 2\ln\left|\sqrt{x+4} + 2\right| + c$

93. $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^3} + c$

94. $\int \frac{x-2}{\sqrt{8-2x-x^2}}\,dx = -\sqrt{8-2x-x^2} - 3\arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right) + c$

95. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1} - x - 1}{\sqrt{x^2+x+1} - x + 1}\right| + c$

96. $\int \sqrt{e^x+1}\,dx = 2\sqrt{e^x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1} - 1}{\sqrt{e^x+1} + 1}\right| + c$

97. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c$

98. $\int \arcsin\left(\sqrt{x}\right)dx = x\arcsin\left(\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + c$

99. $\int \sqrt{\tanh x}\,dx = \tanh^{-1}\left(\sqrt{\tanh x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tanh x}\right) + c$

100. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin(2x)}\,dx = \sqrt{\operatorname{tg} x} + c$

101. $\int \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} + 1\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{\sqrt{3}}\right) + c$

102. $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}\coth^{-1}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{cotg} x}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ \operatorname{cotg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{cotg} x}}{\sqrt{2}}\right) + c$

103. $\int \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}-x\sqrt{2}}\right| + c$

104. $\int \ln\left|x+\sqrt{1-x}\right| dx = x\ln\left|x+\sqrt{1-x}\right| + \varphi\ln\left|\sqrt{1-x}-\varphi\right| + \phi\ln\left|\sqrt{1-x}-\phi\right| - x + \sqrt{1-x} + c$

Seznam zdrojů

ACHESON, David. *The Calculus Story: A Mathematical Adventure*. Kindle vyd. New York: Oxford, 2017. ISBN 978-0-19-252672-4.

BIEDNIAKOVA, Natalia. *Aplikace integrálů ve fyzice a technice* [online]. Brno, 2015 [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/z0ms3/Bakalarska_prace_Natalia_Biedniakova.pdf. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Ústav matematiky a statistiky. Vedoucí práce doc. Petr Hasil, Ph.D.

CHLÁDEK, Dominik. Integrální počet (integrace). *Isibalo* [online]. [cit. 2021-12-19]. Dostupné z: https://isibalo.com/matematika/integralni-pocet-integrace

CHLÁDEK, Dominik. Poslední typ s rekurencí. *Isibalo* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://isibalo.com/pdf/video/783a3063d438a597c43e009956ddc19f.pdf

CHOW, Steve. Calculus 2. *Blackpenredpen* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://www.blackpenredpen.com/calc2

CHOW, Steve. Ultimate Integral Starter. *Blackpenredpen* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://bit.ly/3K6hxlq

CHOW, Steve. 100 Integrals. *Blackpenredpen* [online]. [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://bit.ly/3GmIvTB

MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky*. 2. revid. vyd. Příbram: Pistorius, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

PETÁKOVÁ, Jindra. *MATEMATIKA: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ*. Praha: Prometheus, 2018. ISBN 978-80-7196-099-7. s. 162-165.

PICKOVER, Clifford. *Matematická kniha: Od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky*. Praha: Dokořán, 2012. ISBN 978-80-7363-368-4.

STROGATZ, Steven. *Radost z x: Průvodce matematikou od jedné do nekonečna*. Praha: Dokořán, 2014. ISBN 978-80-7363-529-3.

WONG, Willie (https://math.stackexchange.com/users/1543/willie-wong). Proof of Osborn's rule. *Stackexchange* [online]. [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://math.stackexchange.com/questions/138842/proof-of-osborns-rule

Elementary function. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_function

Euler substitucion. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_substitution

Integrace racionálních funkcí. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-01-02]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Integrace_racion%C3%A1ln%C3%ADch_funkc%C3%AD

Inverse hyperbolic functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_hyperbolic_functions

Hyperbolic functions. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-12-17]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_functions

Nonelementary integral. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-01-12]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Nonelementary_integral

Osborn's rule. *Undergroundmathematics* [online]. [cit. 2021-11-07]. Dostupné z: https://undergroundmathematics.org/glossary/osborns-rule

Primitivní funkce. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-11-09]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Primitivn%C3%AD_funkce

Seznam základních integrálů. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-12-21]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_z%C3%A1kladn%C3%ADch_integr%C3%A1l%C5%AF

Substituční metoda. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2021-12-18]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Substitu%C4%8Dn%C3%AD_metoda_(integrov%C3%A1n%C3%AD)

Trigonometric and Hyperbolic Substitutions. *Math24* [online]. [cit. 2022-01-02]. Dostupné z: https://math24.net/trigonometric-hyperbolic-substitutions.html

Seznam obrázků