Úvod do diskrétní analýzy

Jakub Smolík

12. ledna 2024

Obsah

1 Co je to diskrétní analýza

V anglické literatuře je možné toto odvětví matematiky najít pod názvem "finite calculus", ovšem žádný hezký český překlad jsem nenašel, proto budu používat název „diskrétní analýza".

Diskrétní analýza je neuvěřitelně silná mašinérie, která nám umožňuje analyzovat posloupnosti a řady, zejména hledat součty řad a explicitní vzorce pro členy rekurentně zadaných posloupností. Všechny koncepty diskrétní analýzy mají nějakou paralelu ve známější „spojité" analýze. Ovšem ono zdiskrétnění těchto konceptů mnoho věcí výrazně zjednodušuje.

2 Paralely mezi diskrétní a spojitou analýzou

V této kapitole vybudujeme teorii diskrétní analýzy a naučíme se ji aplikovat.

Poznámka. Nulu budeme považovat za přirozené číslo, čili $0 \in \mathbb{N}$.

2.1 Klesající mocnina

Definice 1 (klesající mocnina)**.** Pro $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ definujeme k-tou *klesající*, resp. *stoupající mocninu* čísla r jako

$$
\begin{aligned}
r^{\underline{k}} &:= \overbrace{r(r-1)\cdots(r-k+1)}^{k \text{ činitelů}} && \text{(klesající)},\\
r^{\overline{k}} &:= r(r+1)\cdots(r+k-1) && \text{(stoupající)}.
\end{aligned}
$$

Když $k = 0$, tak dostáváme prázdný součin, tedy $r^{\underline{0}} = r^{\overline{0}} = 1$. Všimněme si, že $r^{\underline{k}} = r^{\underline{k+1}}/(r-k)$, takže dává smysl dodefinovat $r^{\underline{-1}} := r^{\underline{0}}/(r+1) = 1/(r+1)$.

$$
r^{\underline{-k}} := \frac{1}{(r+1)(r+2)\cdots(r+k)} = \frac{1}{(r+1)^{\overline{k}}}.
$$

Tato definice ovšem dává smysl pouze pro $(r+1)^{\overline{k}} \neq 0$, čili $r \notin \{-1, -2, \ldots -k\}$.

Definice 2 (faktoriál)**.** Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme *faktoriál* čísla n jako $n! := 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

2.2 Operátor diference

Definice 3 (diference)**.** *Operátor diference* Δ definujeme jako

$$
\Delta f(x) := f(x+1) - f(x).
$$

Je to diskrétní alternativa operátoru derivace

$$
\mathrm{D} f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.
$$

Protože celá teorie diskrétní analýzy slouží k hledání součtů řad, tak není nutné, aby funkce f byla definovaná na celých reálných číslech. Měla by to být nějaká posloupnost, čili nám bude stačit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, případně $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Také si všimněme, že diference, na rozdíl od derivace, vždy existuje.

Polynomy se vůči derivaci chovají hezky, protože $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$. Budou se podobně chovat i vůči diferenci? Bohužel, $\Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$. Zachrání nás klesající mocniny, jelikož $\Delta x^{\underline{2}} = (x+1)x - x(x-1) = 2x$. Obecně platí, že $\Delta x^{\underline{n}} = (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} = (x+1)x^{\underline{n-1}} - x^{\underline{n-1}}(x-n+1) = nx^{\underline{n-1}}$.

Další významná funkce ve světě derivací je exponenciála e^x, protože $\mathrm{D}e^x = e^x$. Ve světě diferencí hraje tuto roli funkce 2^x, pro kterou platí $\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x$. Pro obecný základ a dostaneme $\Delta a^x = aa^x - a^x = (a-1)a^x$.

Lemma 1. *Bohužel neexistuje žádný obecný vzorec pro diferenci složené funkce, ale existují nějaké hezké speciální případy. Konkrétně*

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$,

2. $\Delta(\alpha f) = \alpha \Delta f$,

3. $\Delta\big(f(c+x)\big) = (\Delta f)(c+x)$,

4. $\Delta\big(f(c-x)\big) = -(\Delta f)(c-x-1)$.

Výraz Δf je v závorce, abychom si uvědomili, že se jedná o funkci.

Důkaz. Všechny tyto vlastnosti je možné snadno ověřit z definice.

1. $\Delta\big(f(x)+g(x)\big) = f(x+1) + g(x+1) - f(x) - g(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$,
2. $\Delta\big(\alpha f(x)\big) = \alpha f(x+1) - \alpha f(x) = \alpha\big(f(x+1) - f(x)\big) = \alpha \Delta f(x)$.

   Nyní nechť $g(x) = f(c+x)$ a $h(x) = f(c-x)$.

3. $\Delta g(x) = g(x+1) - g(x) = f(c+x+1) - f(c+x) = (\Delta f)(c+x)$,
4. $\Delta h(x) = h(x+1) - h(x) = f(c-x-1) - f(c-x) = -(\Delta f)(c-x-1)$.

❑

Takže například $\Delta(x+10)^{\underline{n}} = n(x+10)^{\underline{n-1}}$ nebo $\Delta 3^{7-x} = -2 \cdot 3^{6-x}$.

2.3 Neurčitá a určitá suma

Definice 4 (neurčitá suma)**.** *Neurčitá suma* funkce f je třída funkcí g takových, že platí $\Delta g = f$. Tedy

$$\sum f(x)\,\delta x = g(x) + c \;\equiv\; \Delta g = f, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Je to diskrétní alternativa neurčitého integrálu

$$\int f(x)\,dx = g(x) + c \;\equiv\; \mathrm{D}g = f, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že obdobně jako $\mathrm{D}c = 0$, tak $\Delta c = 0$.

Protože $\Delta x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}}$, tak $\sum x^{\underline{n}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1} + c$. Je to obdoba známějšího $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$. Ale co když $n = -1$? Potom bychom měli $\sum x^{\underline{-1}}\,\delta x = \frac{1}{0} + c$, což je problém. Stejný problém vzniká u neurčitého integrálu $\int x^{-1}\,dx$. Ovšem dá se ukázat, že $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$. Ve světě neurčitých sum hrají tuto roli harmonická čísla.

Definice 5 (harmonické číslo)**.** Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme n-té *harmonické číslo* jako

$$H_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Když $n = 0$, tak dostáváme prázdný součet, čili $H_0 = 0$.

Všimněme si, že $\Delta H_x = H_{x+1} - H_x = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}$, takže $\sum x^{\underline{-1}}\,\delta x = H_x + c$. Navíc ukážeme, že H_n a $\ln n$ jsou asymptoticky stejné, neboli $\lim_{n\to\infty} H_n/\ln n = 1$. Podobnost $\int x^n\,dx$ a $\sum x^{\underline{n}}\,\delta x$ tedy pokračuje i pro $n = -1$.

Tvrzení 2. $H_n \sim \ln(n)$.

Důkaz. Z grafu funkce $1/x$ je vidět, že

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le H_n \le 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx,$$

tudíž $\ln(n+1) \le H_n \le 1 + \ln(n)$, takže

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \le \frac{H_n}{\ln(n)} \le 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Nyní, když $n \to \infty$, tak $1 \le H_n/\ln(n) \le 1$, čili $H_n/\ln(n) \to 1$. ❑

Definice 6 (určitá suma)**.** *Určitá suma* funkce f od a do b je

$$\sum_a^b f(x)\,\delta x \coloneqq g(b) - g(a), \quad \text{kde } \Delta g = f.$$

Je to diskrétní alternativa určitého integrálu

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq g(b) - g(a), \quad \text{kde } \mathrm{D}g = f.$$

2.4 Základní věta diskrétní analýzy

Věta 3. *(Základní věta diskrétní analýzy) Pro libovolnou dvojici celých čísel $a \le b$ a libovolnou funkci f definovanou pro všechna $k \in \mathbb{Z} : a \le k < b$ platí*

$$\sum_{a \le k < b} f(k) = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \sum_a^b f(x)\,\delta x.$$

Důkaz. Nechť $f = \Delta g$. Sumu nalevo vyjádříme pomocí Δg.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \sum_{k=a}^{b-1} \Delta g(k) &= \sum_{k=a}^{b-1} \bigl(g(k+1) - g(k)\bigr) \\
&= g(a+1) - g(a) + g(a+2) - g(a+1) + \cdots + g(b) - g(b-1) \\
&= g(b) - g(a) = \sum_a^b f(x)\,\delta x.
\end{aligned}$$

❑

Pojďme tuto zásadní větu dokázat ještě jednou, trochu jinak, abychom si uvědomili, co přesně je operátor Δ zač.

Definice 7 (posunutí)**.** *Operátor posunutí* E definujeme jako $\mathrm{E}f(x) \coloneqq f(x+1)$.

Pozorování. Pro operátory Δ, E a 1 platí $1 + \Delta = \mathrm{E}$, kde 1 je operátor identity.

Důkaz. $(1+\Delta)f(x) = f(x)+\Delta f(x) = f(x)+f(x+1)-f(x) = f(x+1) = \mathrm{E}f(x)$. ❑

Důsledek. Opakovanou aplikací máme $(1 + \Delta)^n = \mathrm{E}^n$, takže

$$(1 + \Delta)^n f(x) = \mathrm{E}^n f(x) = f(x + n).$$

Totéž můžeme vyjádřit jinými slovy jako

$$f(x) + \Delta f(x) + \Delta f(x + 1) + \cdots + \Delta f(x + n - 1) = \mathrm{E}^n f(x) = f(x + n).$$

Věta 3 je pouze triviální důsledek tohoto pozorování:

$$\sum_{k=a}^{b-1} \Delta g(k) = -g(a) + g(a + 1) + \sum_{k=a+1}^{b-1} \Delta g(k) = -g(a) + g(b).$$

2.5 Plocha pod křivkou

Pomocí základní věty diskrétní analýzy lze poměrně snadno aproximovat plochu pod křivkou nějaké funkce. Limitním přechodem této aproximace dostaneme známou větu hovořící o vztahu určitého integrálu a plochy pod křivkou.

Definice 8. Plochu pod křivkou reálné, spojité funkce f na uzavřeném intervalu $[a, b]$ označíme jako $P_f(a, b)$. Plochu nad osou x počítáme kladně, plochu pod osou x záporně. Takže třeba pro $f(x) \coloneqq \sin(x)$ je $P_f(0, 2\pi) = 0$.

Řekněme, že chceme najít $P_f(a, b)$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{Z}$. Všimněme si, že tuto plochu můžeme hrubě aproximovat jako součet obsahů obdélníků šířky 1:

$$P_f(a, b) \approx 1 \cdot f(a) + 1 \cdot f(a + 1) + \cdots + 1 \cdot f(b - 1) = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \sum_{a}^{b} f(x)\,\delta x.$$

Sumu na konci lze vyjádřit jako $F(b) - F(a)$, kde $\Delta F = f$. Pro přesnější aproximaci můžeme použít obdélníky šířky 1/2, jejich obsahy ovšem neumíme sečíst, proto graf funkce f rovnoměrně „roztáhneme“ podél osy x tak, aby se bod a přesunul na $2a$ a bod b přesunul na $2b$. Obdélníky šířky 1/2 se tedy roztáhly na šířku 1, takže umíme spočítat součet jejich obsahů. Ono roztažení můžeme formálně popsat pomocí funkce $g(x) \coloneqq f(x/2)$. Trochu lepší aproximace tudíž je

$$P_f(a, b) = \frac{1}{2} P_g(2a, 2b) \approx \frac{1}{2} \sum_{2a}^{2b} g(x)\,\delta x = \frac{1}{2}\big(G(2b) - G(2a)\big), \quad \Delta G = g.$$

Poslední výraz bychom chtěli nějak vyjádřit pomocí funkce f. Pokud definujeme $F(x) \coloneqq G(2x)/2$, tak

$$P_f(a, b) \approx \frac{1}{2}\big(G(2b) - G(2a)\big) = F(b) - F(a).$$

Je mezi funkcemi F a f nějaký vztah? Ano,

$$\frac{F(x+1/2)-F(x)}{1/2} = G(2x+1) - G(2x) = (\Delta G)(2x) = g(2x) = f(x).$$

Pokud by šířka našich obdélníků nebyla $1/2$, ale h, tak bychom stejnou argumentací došli k závěru

$$P_f(a,b) \approx F_h(b) - F_h(a), \quad \text{přičemž} \quad \frac{F_h(x+h)-F_h(x)}{h} = f(x).$$

Čím menší h bude, tím lepší dostaneme aproximaci. Dokonce můžeme dosáhnout libovolně dobré aproximace. Takže, když $h \to 0$, tak $F_h(b) - F_h(a) \to P_f(a,b)$ a navíc $\frac{F_h(x+h)-F_h(x)}{h} \to \mathrm{D}F_h(x)$. To znamená, že $P_f(a,b) = F(b) - F(a)$, kde $\mathrm{D}F = f$, což je přesně definice určitého integrálu.

Věta 4 (základní věta integrálního počtu)**.** *Nechť f je reálná funkce spojitá na uzavřeném intervalu $[a,b]$, potom*

$$P_f(a,b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Odvodili jsme to pro $a, b \in \mathbb{Z}$. Ukázat platnost pro $a, b \in \mathbb{R}$ není těžké, ale ani zajímavé, proto to přeskočíme. ❑

2.6 Metoda per partes

Operátor posunutí ještě využijeme. Stejně jako umíme jednoduše derivovat součin dvou funkcí $\mathrm{D}(fg) = f\mathrm{D}g + g\mathrm{D}f$, tak lze podobně najít jeho diferenci.

Lemma 5. *$\Delta(fg) = f\Delta g + \mathrm{E}g\Delta f$.*

Důkaz. Důkaz je velmi podobný důkazu vzorce pro derivaci součinu.

$$\begin{aligned}\Delta\big(f(x)g(x)\big) &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x+1) \\ &= g(x+1)\big(f(x+1) - f(x)\big) + f(x)\big(g(x+1) - g(x)\big) \\ &= \mathrm{E}g(x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).\end{aligned}$$

❑

Poznámka. Derivace součinu se operátoru posunutí vyhne, protože místo $x+1$ se v důkazu objevuje $x+h$, takže $g(x+h) \to g(x)$, když $h \to 0$.

Stejně jako nám vzorec pro derivaci součinu umožňuje integrovat per partes

$$\int f\mathrm{D}g = fg - \int g\mathrm{D}f,$$

tak můžeme provádět sumaci per partes. Aplikace sumy na přeuspořádanou rovnici $f\Delta g = \Delta(fg) - \mathrm{E}g\Delta f$ totiž dává

$$\sum f\Delta g = fg - \sum \mathrm{E}g\Delta f.$$

Dobrá, takže metoda per partes funguje. Ještě bychom si mohli položit otázku, zda ve světě diskrétní analýzy existuje nějaká obdoba metody substituce. Bohužel neexistuje. Obecné řešení mají pouze speciální případy typu $\sum f(c \pm x)\,\delta x$, které jsme již potkali v kontextu diferencí.

2.7 Tabulka základních vzorečků

$f = \sum g$	$\Delta f = g$	$f = \sum g$	$\Delta f = g$
a	0	2^x	2^x
$x^{\underline{1}} = x$	1	a^x	$(a-1)a^x$
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$	a^{-x}	$-(a-1)a^{-x-1}$
$x^{\underline{n}}$	$nx^{\underline{n-1}}$	$a^x/(a-1)$	a^x
$x^{\underline{n+1}}/(n+1)$	$x^{\underline{n}}$	αf	$\alpha \Delta f$
H_x	$x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$	$f+g$	$\Delta f + \Delta g$
$x^2 = x^{\underline{2}} + x$	$2x+1$	$f\,g$	$f\Delta g + \mathrm{E}g\Delta f$
$f(c+x)$	$(\Delta f)(c+x)$	$f(c-x)$	$-(\Delta f)(c-x-1)$

Tabulka 1: Tabulka základních vzorečků pro práci s diferencemi a sumami. Sloupečky je možné číst zleva doprava ($f \to \Delta f$) nebo zprava doleva ($\sum g \leftarrow g$).

Zkusme vyřešit pár jednoduchých úloh, abychom se přesvědčili, že to opravdu funguje a zvykli si na notaci.

Úloha 1. $\displaystyle\sum_{0 \le k < n} 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$.

Řešení. Budeme postupovat stejně, jako při vyhodnocování $\int_0^n e^x\,dx = e^n - 1$.

$$\sum_{0 \le k < n} 2^k = \sum_0^n 2^x\,\delta x = 2^x \Big|_0^n = 2^n - 1.$$

Úloha 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n$.

Řešení. Všimněme si, že $\sum_0^n$ se nám bude vyhodnocovat snadněji, než $\sum_1^n$. Takže pokud to bude možné, což v tomto případě je, tak budeme sčítat od nuly.

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k = \sum_0^{n+1} x\,\delta x = \frac{x^{\underline{2}}}{2}\Big|_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} - 0 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Úloha 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Řešení. Tentokrát budeme muset rozepsat x^2 jako $x^{\underline{2}} + x$.

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \sum_0^{n+1} x^2\,\delta x = \sum_0^{n+1} (x^{\underline{2}} + x)\,\delta x = \frac{x^{\underline{3}}}{3} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\Big|_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2}$$
$$= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}.$$

Dobrá, tak to zřejmě funguje – dospěli jsme ke známým vzorcům pro součet aritmetické řady a součet čtverců. Pojďme zkusit něco složitějšího, povede to na nesmírně mocnou Gregory-Newtonovu řady.

3 Gregory-Newtonova formule

Úloha 4. $\sum\limits_{0\le k<n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3.$

Řešení (1). Bohužel určit $\sum x^3\,\delta x$ přímo neumíme, takže musíme x^3 vyjádřit nějak chytře. Zřejmě $x^3 = ax^{\underline{3}} + bx^{\underline{2}} + cx^{\underline{1}}$ pro nějaká $a, b, c \in \mathbb{R}$. Po vyřešení soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých zjistíme, že $a = c = 1$ a $b = 3$. Tudíž

$$\sum_{0\le k<n} k^3 = \sum_0^n x^3\,\delta x = \sum_0^n x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x\,\delta x = \frac{x^{\underline{4}}}{4} + x^{\underline{3}} + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\bigg|_0^n = \frac{1}{4}n^2(n-1)^2.$$

Řešení (2). Zkusme se podívat na vyšší řády diferencí funkce x^3.

x^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Δx^3	1	7	19	37	61	91	127	169	217	
$\Delta^2 x^3$	6	12	18	24	30	36	42	54		
$\Delta^3 x^3$	6	6	6	6	6	6	6			

Vypadá to, že $\Delta^3 x^3 = 6$. Postupnou sumací se dopracujeme až k $\sum x^3\,\delta x$.

$$\Delta^2 x^3 = \sum \Delta^3 x^3\,\delta x = \sum 6\,\delta x = 6x + c \overset{*}{=} 6x + 6, \qquad * \Delta^2 x^3(0) = 6$$

$$\Delta x^3 = \sum 6x + 6\,\delta x = 6\frac{x^{\underline{2}}}{2} + 6x + c \overset{*}{=} 6\frac{x^{\underline{2}}}{2} + 6x + 1, \qquad * \Delta x^3(0) = 1$$

$$x^3 = \sum 6\frac{x^{\underline{2}}}{2} + 6x + 1\,\delta x = 6\frac{x^{\underline{3}}}{2\cdot 3} + 6\frac{x^{\underline{2}}}{2} + x + c, \quad c \overset{*}{=} 0. \quad * 0^3 = 0$$

Nyní už snadno dopočítáme $\sum x^3\,\delta x$ jako

$$\sum x^3\,\delta x = \sum 6\frac{x^{\underline{3}}}{2\cdot 3} + 6\frac{x^{\underline{2}}}{2} + x\,\delta x = 6\frac{x^{\underline{4}}}{4!} + 6\frac{x^{\underline{3}}}{3!} + 1\frac{x^{\underline{2}}}{2!} + c.$$

Označme $f(x) \coloneqq \sum_0^x t^3\,\delta t$. Hledaný součet řady ze zadání úlohy je $f(n)$. Zřejmě $\Delta f(x) = x^3$, takže

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^x t^3\,\delta t = 6\frac{t^{\underline{4}}}{4!} + 6\frac{t^{\underline{3}}}{3!} + 1\frac{t^{\underline{2}}}{2!}\bigg|_0^x = 6\frac{x^{\underline{4}}}{4!} + 6\frac{x^{\underline{3}}}{3!} + 1\frac{x^{\underline{2}}}{2!} \\ &= \Delta^4 f(0)\frac{x^{\underline{4}}}{4!} + \Delta^3 f(0)\frac{x^{\underline{3}}}{3!} + \Delta^2 f(0)\frac{x^{\underline{2}}}{2!} + \Delta f(0)\frac{x^{\underline{1}}}{1!}. \end{aligned}$$

Druhé řešení této úlohy sice bylo podstatně delší, ale poskytlo nám důležitý pohled na chování diferencí vyšších řádů. Podruhé už nebudeme muset dělat celý tento proces od začátku.

3.1 Rychlý algoritmus na výpočet součtu mocnin

Chceme umět rychle počítat $\sum_{0\le k<n} k^m$ pro nějaké pevně dané m. Ten úplně nejpřímočařejší postup by používal $\Theta(n)$ sčítání a $\Theta(nm)$ násobení. Pokud bychom

mocniny počítali chytře, tedy například $k^{27} = k^1 k^2 k^8 k^{16}$, tak bychom násobení potřebovali pouze $\Theta(n \log m)$, ale to je pořád dost pomalé.

Zkusme se na tento problém podívat pomocí diskrétní analýzy. Definujme $f(x) := \sum_0^x t^m \,\delta t$, hledaný součet je tedy $f(n)$. Protože k^m je nějaká lineární kombinace klesajících mocnin stupně nejvýše m, tak f je nějaká lineární kombinace klesajících mocnin stupně nejvýše $m+1$. Takže $\Delta^{m+1} f$ je konstantní a $\Delta^{m+2} f$ je nulová. Hodnoty prvních $m+1$ diferencí f v nule můžeme určit z prvních $m+1$ hodnot funkce $\Delta f = x^m$. Stejnou argumentací jako v úloze 4 dojdeme k závěru

$$f(n) = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} n^{\underline{k}} = \frac{\Delta f(0)}{1!} n^{\underline{1}} + \frac{\Delta^2 f(0)}{2!} n^{\underline{2}} + \cdots + \frac{\Delta^{m+1} f(0)}{(m+1)!} n^{\underline{m+1}}.$$

Hodnoty $\Delta^k f(0)$ se nemění, takže je stačí spočítat pouze jednou. To zvládneme pomocí $\Theta(m^2)$ operací. Protože $n^{\underline{k+1}} = (n-k) n^{\underline{k}}$ a $(k+1)! = (k+1)k!$, tak vyhodnocení této funkce stojí pouze $\Theta(m)$ operací, takže jsme konečně dostali algoritmus nezávislý na velikosti vstupního parametru n. Níže je přiložená implementace v Pythonu pomocí knihovny NumPy.

```
import numpy as np
class FastSummator():
    constants: [int]
    def __init__(self, m: int):
        diffs = np.zeros((m+1, m+1), dtype=int)
        # diference 1. radu je proste x na m-tou
        diffs[0] = [i**m for i in range(m+1)]
        for k in range(1, m+1):
            # k-ty radek = diference (k-1)-ho radku
            diffs[k] = np.roll(diffs[k-1], -1) - diffs[k-1]
        # ulozime si hodnoty diferenci v nule
        self.constants = diffs[:, 0]

    def sum(self, n: int) -> int:
        # kombinacni cisla: binom(n,1) = n
        binoms = np.full(len(self.constants), n, dtype=int)
        for k in range(1, len(self.constants)):
            # binom(n,k+1) = binom(n,k) * (n-k)/(k+1)
            binoms[k] = binoms[k-1] * (n-k) // (k+1)
        return np.sum(self.constants * binoms)
```

3.2 Formulace a důkaz věty

Pojďme pořádně zformulovat, co jsme se to vlastně dozvěděli.

Definice 9 (Gregory-Newtonova řada)**.** Pro funkci f definujeme její *Gregory-Newtonovu řadu* jako funkci

$$N_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} \Delta^k f(0).$$

Je to diskrétní alternativa Taylorovy řady

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{D}^k f(0)}{k!} x^k.$$

Věta 6 (Gregory-Newtonova formule)**.** *Pro libovolnou funkci f a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$f(n) = N_f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f(0)}{k!} n^{\underline{k}}.$$

Důkaz. Nechť n je nějaké pevně dané přirozené číslo. Nejprve si uvědomme, že všechny členy $N_f(n)$ jsou pro $k > n$ nulové. To je díky tomu, že pro $n, k \in \mathbb{N}, k > n$ je $n^{\underline{k}} = 0$. Hodnoty $f(0), f(1), \dots f(n)$ jednoznačně určují polynom p stupně n, takový, že $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n : p(k) = f(k)$. Ukážeme, že $p(n) = N_f(n)$. Zapišme p jako lineární kombinaci klesajících mocnin

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^{\underline{2}} + a_3 x^{\underline{3}} + a_4 x^{\underline{4}} + \cdots + a_n x^{\underline{n}}.$$

Protože $\Delta x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}$, tak $\Delta^k x^{\underline{n}} = n^{\underline{k}} x^{\underline{n-k}}$, tudíž pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\Delta^k p(x) &= 0 + a_k k^{\underline{k}} x^{\underline{0}} + a_{k+1}(k+1)^{\underline{k}} x^{\underline{1}} + \cdots + a_n n^{\underline{k}} x^{\underline{n-k}} \\ &= a_k k! + a_{k+1}(k+1)^{\underline{k}} x^{\underline{1}} + \cdots + a_n n^{\underline{k}} x^{\underline{n-k}}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že $\Delta^k p(0) = a_k k!$, takže $a_k = \Delta^k p(0)/k! = \Delta^k f(0)/k!$. Proto jsou všechny členy $N_f(n)$ a $p(n)$ stejné, takže $N_f(n) = p(n) = f(n)$.

❑

Důsledek. Součet řady $\sum_{k=0}^{m} f(k)$ je polynom $\iff \exists n \in \mathbb{N} : \Delta^n f = 0$.

Důkaz. Nejprve dokážeme implikaci '$\Rightarrow$'. Označme $g(x) := \sum_{k=0}^{x} f(k)$. Nechť n je stupeň g; g je tedy možné vyjádřit jako nějakou lineární kombinaci klesajících mocnin stupně nejvýše n, tudíž $\Delta^{n+1} g = \Delta^n f = 0$.
Nyní '$\Leftarrow$'. V tomto případě má Gregory-Newtonova řada funkce f pouze konečný počet nenulových členů, její součet je tedy nějaký polynom. Protože funkci f vyhodnocujeme pouze v přirozených číslech, tak je pro nás nerozlišitelná od N_f. Takže vlastně sčítáme polynomy a součet polynomů je opět polynom.

❑

Polynomy jsou tedy v jistém slova smyslu speciální. Můžeme si všimnou, že z tohoto pozorování vyplývá ještě jedna zajímavá vlastnost. Gregory-Newtonova řada polynomu p má vždy konečně mnoho nenulových členů, takže to je také nějaký polynom. Polynom stupně n je určen hodnotami v $n+1$ bodech, jenže p a N_p mají stejné hodnoty ve všech přirozených číslech, takže $p = N_p$.[1] Z toho vyplývá, že $p(z) = N_p(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Další funkce, která se takto chová, je exponenciála 2^z. Můžeme ji totiž zapsat jako

$$2^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\underline{k}}}{k!} = 1 + z + \frac{z^{\underline{2}}}{2!} + \frac{z^{\underline{3}}}{3!} + \frac{z^{\underline{4}}}{4!} + \cdots, \qquad \forall z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0.$$

Vlastně by nás to nemělo překvapovat, protože

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tuto vlastnost 2^z je možné dokázat vyjádřením výrazu $(1+1)^z$ pomocí zobecněné binomické věty.

[1] P = NP confirmed?!

Úloha 5. Najdi pokračování posloupnosti $1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, \ldots$

Řešení. Samozřejmě můžeme za následující prvek této posloupnosti prohlásit úplně cokoliv, ale my bychom rádi vymysleli nějaký rozumný explicitní vzorec. Zkusme si napsat diference jejích členů.

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
f(n) & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 31 & 57 & 99 & 163 & 256 \\
\Delta f(n) & 1 & 2 & 4 & 8 & 15 & 26 & 42 & 64 & 93 & \\
\Delta^2 f(n) & 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & 22 & 29 & & \\
\Delta^3 f(n) & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & & \\
\Delta^4 f(n) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Gregory-Newtonova formule nám říká, že funkci f je možné zapsat jako

$$f(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{2} + 1,$$

přičemž $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4$ až $f(8) = 163$ a $f(9) = 256$. Pokud přijmeme, že členy této posloupnosti má být možné vyjádřit pomocí nějakého polynomu, potom je f její jedinou možnou interpretací.

Poznámka. Mimochodem, $f(n)$ udává maximální možný počet oblastí, na který lze rozdělit kruh pomocí n úseček.

4 Řešené příklady

4.1 Součty jednoduchých řad

Úloha 6. $\sum\limits_{0 \le k < n} a^k = 1 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{n-1}.$

Řešení. Pokud $a = 1$, tak součet této řady je n. Jinak máme

$$\sum_{0 \le k < n} a^k = \sum_0^n a^x \,\delta x = \frac{a^x}{a-1}\bigg|_0^n = \frac{a^n}{a-1} - \frac{1}{a-1} = \frac{a^n - 1}{a-1}.$$

Úloha 7. $\sum\limits_{0 \le k < n} k^{\underline{m}} = 0^{\underline{m}} + 1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + 3^{\underline{m}} + \cdots + (n-1)^{\underline{m}}.$

Řešení. Pokud $m = -1$, potom $k^{\underline{m}} = 1/(k+1)$, takže součet této řady je H_n. V opačném případě můžeme uplatnit vzoreček $\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}$, takže

$$\sum_{0 \le k < n} k^{\underline{m}} = \sum_0^n x^{\underline{m}} \,\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}.$$

Je důležité si uvědomit, že m je konstanta. Proto přestože $k! = k^{\underline{k}}$, tak dosazením k za m nezískáme součet faktoriálů.

Úloha 8. $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!.$

Řešení. Funkce $x \cdot x!$ v naší tabulce není, takže nejprve musíme najít nějakou funkci f, splňující $x \cdot x! = \Delta f(x)$. Máme dvě možnosti. Buď takovou funkci uhodnout, nebo nějak chytře upravit $x \cdot x!$. Pojďme zkusit to druhé:

$$x \cdot x! = (x + 1 - 1)x! = (x+1)x! - x! = (x+1)! - x! = \Delta x!.$$

Nyní už je řešení této úlohy snadné.

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \sum_1^{n+1} x \cdot x! \,\delta x = x!\bigg|_1^{n+1} = (n+1)! - 1.$$

4.2 Součty řad pomocí per partes

Úloha 9. $\sum\limits_{0 \le k < n} k 2^k = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^{n-1}.$

Řešení. Představme si, že jsme místo sumy dostali integrál $\int x e^x \, dx$. Ten bychom s největší pravděpodobností řešili pomocí per partes jako

$$\int x e^x \, dx = \int x \mathrm{D}(e^x) \, dx = x e^x - \int \mathrm{D}(x) e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx.$$

Pojďme zkusit udělat to samé pro naší sumu.

$$\begin{aligned}\sum x 2^x \,\delta x &= \sum x \Delta(2^x) \,\delta x = x 2^x - \sum \Delta(x) \mathrm{E}(2^x) \,\delta x = x 2^x - \sum 2^{x+1} \,\delta x \\ &= x 2^x - 2^{x+1} = (x-2) 2^x + c.\end{aligned}$$

Je vidět, že per partes je možné aplikovat na stejné druhy problémů. Součet řady ze zadaní určíme jednoduchým vyhodnocením této sumy.

$$\sum_{0\le k<n} k2^k = \sum_0^n x2^x\,\delta x = (x-2)2^x\Big|_0^n = (n-2)2^n + 2.$$

Úloha 10. $\displaystyle\sum_{0\le k<n} H_k = H_1 + H_2 + \cdots + H_{n-1}.$ $(H_0 = 0)$

Řešení. Opět využijeme metodu per partes. Budeme postupoval velmi podobně, jako kdybychom řešili integrál $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$.

$$\begin{aligned}\sum H_x\,\delta x &= \sum 1\cdot H_x\,\delta x = \sum \Delta(x)H_x\,\delta x = xH_x - \sum \mathrm{E}(x)\Delta(H_x)\,\delta x\\ &= xH_x - \sum (x+1)x^{\underline{-1}}\,\delta x = xH_x - \sum 1\,\delta x = xH_x - x + c.\end{aligned}$$

Pojďme si to ještě ověřit z definice neurčité sumy:

$$\Delta(xH_x - x) = \Delta(xH_x) - 1 = \mathrm{E}(x)\Delta(H_x) + \Delta(x)H_x - 1 = (x+1)x^{\underline{-1}} + H_x - 1 = H_x.$$

Nyní tento výsledek využijeme, abychom určili součet řady ze zadání.

$$\sum_{0\le k<n} H_k = \sum_0^n H_x\,\delta x = xH_x - x\Big|_0^n = nH_n - n.$$

Úloha 11. $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 3^k = 1^2\cdot 3^1 + 2^2\cdot 3^2 + 3^2\cdot 3^3 + 4^2\cdot 3^4 + \cdots + n^2\cdot 3^n.$

Řešení. Kdyby to byl integrál, tak by tohle byla typická úloha na vícenásobné použití per partes. Pojďme tuto sumu nejprve vyřešit pomalu.

$$\begin{aligned}\sum x^2 3^x\,\delta x &= \sum x^2\Delta\left(\frac{3^x}{2}\right)\delta x\\ &= \frac{1}{2}x^2 3^x - \sum (2x+1)\frac{3^{x+1}}{2}\,\delta x\\ &= \frac{1}{2}x^2 3^x - \sum (2x+1)\Delta\left(\frac{3^{x+1}}{4}\right)\delta x\\ &= \frac{1}{2}x^2 3^x - \frac{1}{4}(2x+1)3^{x+1} + \sum 2\frac{3^{x+2}}{4}\,\delta x\\ &= \frac{1}{2}x^2 3^x - \frac{1}{4}(2x+1)3^{x+1} + \frac{3^{x+2}}{4}\\ &= \frac{1}{2}3^x(x^2 - 3x + 3) + c.\end{aligned}$$

To nevypadá moc hezky, zkusíme si to ověřit. Diference tohoto součinu je

$$\frac{1}{2}3^{x+1}(2x+1-3) + \frac{1}{2}2\cdot 3^x(x^2-3x+3) = \frac{3^x}{2}(6x-6+2x^2-6x+6) = 3^x x^2,$$

což odpovídá.

Tato metoda funguje, ale je zbytečně pomalá. Kdybychom řešili integrál $\int x^2 3^x \, dx$, tak bychom nejspíš raději použili rychlou verzi metody per partes:

$$\int x^2 3^x \, dx = \left| \begin{array}{ccccc} & \mathrm{D} & & \int \\ + & x^2 & & 3^x \\ & & \searrow & \\ - & 2x & & 3^x/\ln(3) \\ & & \searrow & \\ + & 2 & & 3^x/\ln^2(3) \\ & & \searrow & \\ - & 0 & \rightarrow & 3^x/\ln^3(3) \end{array} \right| = x^2 \frac{3^x}{\ln(3)} - 2x \frac{3^x}{\ln^2(3)} + 2 \frac{3^x}{\ln^3(3)} - \int 0 \, dx.$$

Poslední integrál $\int 0 \, dx = c$. Zkusme udělat to samé pro naší sumu. Postup bude analogický, pouze si budeme muset dát pozor na posuny.

$$\sum x^2 3^x \, \delta x = \left| \begin{array}{ccccc} & \Delta & & \sum \\ + & x^2 & & 3^x \\ & & \searrow & \\ - & 2x+1 & \mathrm{E} & 3^x/2 \\ & & \searrow & \\ + & 2 & \mathrm{E}^2 & 3^x/4 \\ & & \searrow & \\ - & 0 & \mathrm{E}^3 \rightarrow & 3^x/8 \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 3^x - \frac{1}{4}(2x+1)3^{x+1} + \frac{1}{4} 3^{x+2} + c.$$

Dobrá, nyní můžeme sečíst řadu ze zadaní.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 3^k &= \sum_{1}^{n+1} x^2 3^x \, \delta x = \frac{1}{2} 3^x (x^2 - 3x + 3) \Big|_1^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} 3^{n+1} (n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 3) - \frac{1}{2} 3 \\ &= \frac{1}{2} 3^{n+1} (n^2 - n + 1) - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Úloha 12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kH_k = H_1 + 2H_2 + 3H_3 + \cdots + nH_n.$

Řešení. Nejprve určíme odpovídající neurčitou sumu pomocí per partes.

$$\begin{aligned} \sum x H_x \, \delta x &= \left| \begin{array}{ccccc} & \Delta & & \sum \\ + & x & & H_x \\ & & \searrow & \\ - & 1 & \mathrm{E} \rightarrow & xH_x - x \end{array} \right| \\ &= x^2 H_x - x^2 - \sum (x+1) H_{x+1} - (x+1) \, \delta x \\ &= x^2 H_x - x^2 + \frac{x^{\underline{2}}}{2} + x - \sum (x+1) H_{x+1} \, \delta x. \end{aligned}$$

Chtěli bychom dosáhnou zacyklení, ale kvůli posunutí to není možné. Učiníme jednoduché pozorování, které nám umožní podobné situace efektivně řešit.

Pozorování. Platí $\sum f(x+1) \, \delta x = \sum f(x) \, \delta x + f(x)$.

Důkaz. Pravdivost této identity vyplývá z definice neurčité sumy:

$$\Delta\left(\sum f(x) \, \delta x + f(x)\right) = f(x) + \Delta f(x) = f(x+1).$$

❑

Takže

$$\sum xH_x\,\delta x = x^2 H_x - x^2 + \frac{x^{\underline{2}}}{2} + x - \sum xH_x\,\delta x - xH_x.$$

Z toho vyplývá, že

$$\begin{aligned}
\sum xH_x\,\delta x &= \frac{1}{2}\left(x^2 H_x - xH_x - x^2 + x + \frac{x^{\underline{2}}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left((x^2 - x)H_x - x(x-1) + \frac{x(x-1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x(x-1)H_x - \frac{x(x-1)}{2}\right) = \frac{x^{\underline{2}}}{4}(2H_x - 1).
\end{aligned}$$

A součet zadané řady tedy je

$$\sum_{k=0}^{n} kH_x = \sum_{0}^{n+1} xH_x\,\delta x = \frac{x^{\underline{2}}}{4}(2H_x - 1)\bigg|_0^{n+1} = \frac{n(n+1)}{4}(2H_{n+1} - 1).$$

Tento výsledek je poměrně elegantní, protože říká, že

$$1H_1 + 2H_2 + 3H_3 + \cdots + nH_n = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\big(H_{n+1} - \tfrac{1}{2}\big).$$

Úloha 13. $\displaystyle\sum_{0\le k<n} H_k^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \cdots + H_{n-1}^2.$

Řešení. Po aplikaci per partes použijeme pozorování z minulé úlohy.

$$\begin{aligned}
\sum H_x^2\,\delta x &= \left|\begin{array}{lcccc} & \Delta & & \sum \\ + & H_x & \searrow & H_x \\ - & \frac{1}{x+1} & \xrightarrow{\mathrm{E}} & xH_x - x \end{array}\right|\\
&= xH_x^2 - xH_x - \sum \frac{(x+1)(H_{x+1} - 1)}{x+1}\,\delta x\\
&= xH_x^2 - xH_x + x - \sum H_{x+1}\,\delta x\\
&= xH_x^2 - xH_x + x - (xH_x - x + H_x)\\
&= xH_x^2 - (2x+1)H_x + 2x + c.
\end{aligned}$$

Proto

$$\sum_{0\le k<n} H_k^2 = \sum_{0}^{n} H_x\,\delta x = nH_n^2 - (2n+1)H_n + 2n.$$

4.3 Součty řad kombinačních čísel

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$, čteme „n nad k,“ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. Rozmysleme si, kolik to vlastně je. Jedním z možných řešení je představit si, že tuto k-prvkovou podmnožinu budujeme. První prvek můžeme vybrat n způsoby, druhý už pouze $n-1$ způsoby atd. Poslední, k-tý prvek lze vybrat $n-k+1$ způsoby. Právě jsme vytvořili $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ posloupností k prvků, za každou podmnožinu celkem $k!$ permutací. Odpověď na naši otázku tedy je $n^{\underline{k}}/k!$. My tento koncept ještě trochu zobecníme.

Definice 10 (kombinační číslo)**.** Pro $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ definujeme *kombinační číslo*, nebo také *binomický koeficient* jako

$$\binom{r}{k} := \begin{cases} r^{\underline{k}}/k!, & \text{pro } k \geq 0, \\ 0, & \text{pro } k < 0. \end{cases}$$

Všimněme si, že speciálně pro $n, k \in \mathbb{N}$ a $0 \leq k \leq n$ platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dále, pokud $n, k \in \mathbb{N}$, ale $k > n$, potom $n^{\underline{k}} = 0$, takže $\binom{n}{k} = 0$. Intuitivně si můžeme představovat, že n-tá řada Pascalova trojúhelníku končí $\binom{n}{n}$ a potom následují samé nuly. Podobně, doleva od $\binom{n}{0}$ jsou také nuly.

Kombinační čísla si zaslouží vlastní kategorii, protože mají spoustu hezkých kombinatorických vlastností.

Tvrzení 7 (pravidlo souměrnosti)**.** *Pro všechna $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ platí*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1}$$

Důkaz. Pravidlo souměrnosti platí, protože pro $k < 0$ jsou obě strany nulové a pro $k \geq 0$ lze mezi množinou všech k-prvkových podmnožin a množinou všech $(n-k)$-prvkových podmnožin sestrojit bijekci, která každé k-prvkové podmnožině přiřadí její $(n-k)$-prvkový doplněk.

❑

Další pravidlo nám umožňuje manipulovat s indexy kombinačních čísel.

Tvrzení 8 (pravidlo extrakce)**.** *Pro všechna $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ platí*

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}, \tag{2}$$

$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}, \tag{3}$$

$$k\binom{r}{k} = (r-k+1)\binom{r}{k-1}. \tag{4}$$

Důkaz. První identita plyne z definice 10, protože $r^{\underline{k}} = r(r-1)^{\underline{k-1}}$ a $k! = k(k-1)!$ pro $k > 0$; obě strany jsou nulové pro $k \leq 0$. Druhá identita platí, protože $r(r-1)^{\underline{k}} = r^{\underline{k}}(r-k)$ pro $k \geq 0$; obě strany jsou opět nulové pro $k < 0$. Třetí identitu získáme aplikací (3) na pravou stranu (2). Pro $r, k \in \mathbb{N}$ mají všechny tyto identity hezký kombinatorický význam.

❑

Tvrzení 9 (Pascalovo pravidlo)**.** *Pro všechna $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ platí*

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}. \tag{5}$$

Důkaz. Pascalovo pravidlo můžeme dokázat sečtením prvních dvou extrakčních identit (2) a (3):

$$(r-k)\binom{r}{k}+k\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k}+r\binom{r-1}{k-1};$$

vydělení obou stran rovnice $r \neq 0$ nám dá (5). Zkontrolovat případ $r=0$ je snadné.

❑

Ještě bychom měli zjistit diferenci a sumu kombinačních čísel. Diference je

$$\Delta\binom{x}{k}=\binom{x+1}{k}-\binom{x}{k}=\binom{x}{k}+\binom{x}{k-1}-\binom{x}{k}=\binom{x}{k-1},$$

přičemž jsme v druhé rovnosti aplikovali Pascalovo pravidlo. Suma tudíž je

$$\sum\binom{x}{k}\,\delta x=\binom{x}{k+1}+c.$$

Úloha 14. $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{n}{k}.$

Řešení. Toto je známá „hokejková“ řada, protože v Pascalově trojúhelníku tvoří její členy spolu s výsledkem tvar hokejky. S naším aparátem ji spočítáme snadno:

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{k}=\sum_{0}^{n+1}\binom{x}{k}\,\delta x=\binom{x}{k+1}\bigg|_{0}^{n+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Úloha 15. $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}m\binom{m}{k}=k\binom{k}{k}+(k+1)\binom{k+1}{k}+\cdots+n\binom{n}{k}.$

Řešení. Toto je trochu složitější variace na téma hokejek.

$$\begin{aligned}\sum_{0}^{n+1}x\binom{x}{k}\,\delta x &= \left|\begin{array}{cccc} & \Delta & & \sum \\ + & x & \searrow & \binom{x}{k} \\ - & 1 & \mathrm{E}\searrow & \binom{x}{k+1} \\ + & 0 & \mathrm{E}^2\rightarrow & \binom{x}{k+2}\end{array}\right| = x\binom{x}{k+1}-\binom{x+1}{k+2}\bigg|_{0}^{n+1} \\ &= (n+1)\binom{n+1}{k+1}-\binom{n+2}{k+2}-0\binom{0}{k+1}+\binom{1}{k+2} \\ &= (n+1)\binom{n+1}{k+1}-\binom{n+1}{k+1}-\binom{n+1}{k+2} \\ &= n\binom{n+1}{k+1}-\binom{n+1}{k+2}.\end{aligned}$$

Úloha 16. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{m-k-1}{m-n-1}\Big/\binom{m}{n}.$

Řešení. Tato řada možná vypadá na první pohled děsivě, ale principiálně bychom ji měli být schopni vyřešit. Označme S součet řady ze zadní a

$$T := \sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1}.$$

Ve výrazu $\binom{m}{n}$ se index k neobjevuje, takže $S = T/\binom{m}{n}$. Proto stačí určit T. Pro použití per partes, budeme muset zjistit sumu $\sum \binom{m-x-1}{s}\,\delta x$. To naštěstí není problém, protože $\Delta\binom{m-x}{s} = -\binom{m-x-1}{s-1}$, takže $\sum \binom{m-x-1}{s}\,\delta x = -\binom{m-x}{s+1}$. Nyní

$$\begin{aligned}
T = \sum_{0}^{n+1} x\binom{m-x-1}{m-n-1}\,\delta x &= \left|\begin{array}{cccc} & \Delta & & \sum \\ + & x & \searrow & \binom{m-x-1}{m-n-1} \\ - & 1 & \mathrm{E}\searrow & -\binom{m-x}{m-n} \\ + & 0 & \mathrm{E}^2\rightarrow & \binom{m-x+1}{m-n+1} \end{array}\right| \\
&= -x\binom{m-x}{m-n} - \binom{m-x}{m-n+1}\bigg|_0^{n+1} \\
&= -(n+1)0 - 0 + 0\binom{m}{m-n} + \binom{m}{m-n+1} \\
&= \binom{m}{m-n+1} = \frac{m-(m-n+1)+1}{m-n+1}\binom{m}{m-n} \qquad \text{podle (4)} \\
&= \frac{n}{m-n+1}\binom{m}{m-n}.
\end{aligned}$$

Hledaná suma tudíž je

$$S = \frac{n}{m-n+1}\binom{m}{m-n}\bigg/\binom{m}{n} = \frac{n}{m-n+1}.$$

4.4 Součty nekonečných řad

Abychom mohli aplikovat mašinérii diskrétní analýzy na nekonečné řady, tak nejprve musíme definovat nevlastní sumu.

Definice 11 (nevlastní suma)**.** Definujme

$$\sum_{a}^{\infty} f(x)\,\delta x := \lim_{n\to\infty} \sum_{a}^{n} f(x)\,\delta x.$$

Lemma 10. *Platí*

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(k) = \sum_{a}^{\infty} f(x)\,\delta x.$$

Důkaz. Důkaz je přímočarý z definice součtu nekonečné řady.

$$\sum_{k=a}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=a}^{n} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{a}^{n-1} f(x)\,\delta x = \sum_{a}^{\infty} f(x)\,\delta x.$$

❏

Úloha 17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots.$

Řešení. Řadu nejprve přepišme pomocí klesajících mocnin a poté ji sečteme.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} k^{\underline{-2}} = \sum_{0}^{\infty} x^{\underline{-2}}\,\delta x \\ &= \frac{x^{\underline{-1}}}{-1}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{x+1}\Big|_{\infty}^{0} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1.\end{aligned}$$

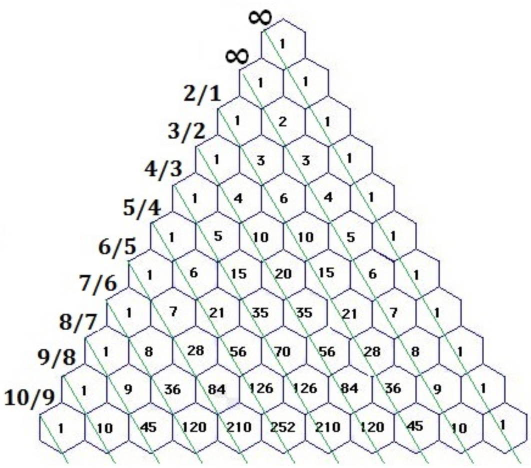
Úloha 18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\overline{m}}} = \frac{1}{1^{\overline{m}}} + \frac{1}{2^{\overline{m}}} + \frac{1}{3^{\overline{m}}} + \cdots, \qquad m \geq 2.$

Řešení. Úloha 17 je speciální případ této řady, konkrétně pro $m = 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\overline{m}}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\overline{m}}} = \sum_{k=0}^{\infty} k^{\underline{-m}} = \sum_{0}^{\infty} x^{\underline{-m}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{-m+1}}}{-m+1}\Big|_0^{\infty} = \frac{x^{\underline{-(m-1)}}}{m-1}\Big|_{\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{(m-1)(x+1)^{\overline{m-1}}}\Big|_{\infty}^{0} = \frac{1}{(m-1)1^{\overline{m-1}}} - 0 = \frac{1}{(m-1)(m-1)!}.\end{aligned}$$

Úloha 19. $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{k}{k}} + \frac{1}{\binom{k+1}{k}} + \frac{1}{\binom{k+2}{k}} + \cdots$

Řešení. Součet této nekonečné řady odpovídá součtu převrácených hodnot k-tých prvků všech řad Pascalova trojúhelníku, viz obrázek 1.



Obrázek 1: Vyznačení součtů převrácených hodnot k-tých prvků řad; zdroj: [1].

Pro $k = 0$ tato řada zjevně diverguje. Případ $k = 1$ je zajímavější, dostáváme totiž harmonickou řadu, ale ta opět diverguje. Zaměřme se na $k \geq 2$. Všimněme si, že k je konstanta, takže můžeme vytknout $k!$ před sumu. Navíc,

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k!}{n^{\underline{k}}} = \frac{k!}{(n-k+1)^{\overline{k}}},$$

a tudíž

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = k! \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k+1)^{\overline{k}}} = k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\overline{k}}} =$$

ovšem tuto sumu jsme již vyřešili v úloze 18, takže

$$= k! \frac{1}{(k-1)(k-1)!} = \frac{k}{k-1}.$$

4.5 Alternující harmonická řada

V úloze 10 jsme došli k výsledku $\sum H_x \, \delta x = xH_x - x + c$. V této sekci se zaměříme na alternující harmonickou řadu, která je daná předpisem

$$A_n := \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Úloha 20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$

Řešení. Označme součet této řady S. Potom $S = \lim_{n\to\infty} A_n$. Tato řada zjevně nějak souvisí s harmonickou řadu, zkusme ji tedy vyjádřit pomocí harmonických čísel. Všimněme si, že záporné členy mají ve jmenovateli vždy něco sudého, takže je můžeme přepsat jako $1/2n = 1/n - 1/2n$.

$$\begin{aligned}
A_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n} \\
&= H_{2n} - H_n.
\end{aligned}$$

Protože $H_n \sim \ln(n)$, tak

$$S = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \big(H_{2n} - H_n\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\ln(2n) - \ln(n)\big) = \lim_{n\to\infty} \ln(2) = \ln(2).$$

Jelikož umíme A_n vyjádřit pomocí harmonických čísel, tak bychom měli být schopni nalézt ΔA_x. Známe $\Delta H_x = x^{\underline{-1}}$, ale ještě musíme najít ΔH_{2x}.

$$\Delta H_{2x} = H_{2x+2} - H_{2x} = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+2} = (2x)^{\underline{-1}} + \frac{1}{2} x^{\underline{-1}}.$$

Z toho také vyplývá, že $\sum (2x)^{\underline{-1}} \, \delta x = H_{2x} - \frac{1}{2} H_x$.

Úloha 21. $\displaystyle\sum_{0\le k<n} A_n = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}.$

Řešení. Označme hledaný součet S. Potom

$$S = \sum_{0 \le k < n} (H_{2k} - H_k) = \sum_{0 \le k < n} H_{2k} - \sum_{0 \le k < n} H_k = n - nH_n + \sum_{0 \le k < n} H_{2k}.$$

Čili musíme určit $\sum H_{2x}\,\delta x$.

$$\begin{aligned}
\sum H_{2x}\,\delta x &= \left|\begin{array}{lccc} & \Delta & & \sum \\ + & H_{2x} & \searrow & 1 \\ - & \frac{1}{2x+1} + \frac{x^{\underline{-1}}}{2} & \xrightarrow{\mathrm{E}} & x \end{array}\right| \\
&= xH_{2x} - \sum \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{x^{\underline{-1}}}{2} \right) (x+1)\,\delta x \\
&= xH_{2x} - \frac{1}{2} \sum \left(\frac{2}{2x+1} + x^{\underline{-1}} \right) (x+1)\,\delta x \\
&= xH_{2x} - \frac{1}{2} \sum \frac{2x+2}{2x+1} + 1\,\delta x \\
&= xH_{2x} - \frac{1}{2} \sum (2x)^{\underline{-1}} + 2\,\delta x \\
&= xH_{2x} - \frac{1}{2} \left(H_{2x} - \frac{1}{2} H_x + 2x \right) \\
&= \frac{2x-1}{2} H_{2x} + \frac{1}{4} H_x - x + c.
\end{aligned}$$

Součet řady ze zadání tedy je

$$\begin{aligned}
S &= n - nH_n + \frac{2x-1}{2} H_{2x} + \frac{1}{4} H_x - x \Big|_0^n \\
&= n - nH_n + \frac{2n-1}{2} H_{2n} + \frac{1}{4} H_n - n \\
&= \frac{2n-1}{2} H_{2n} - \frac{4n-1}{4} H_n.
\end{aligned}$$

4.6 Řešení rekurencí

Diskrétní analýza nám umožňuje řešit i některé rekurentně zadané posloupnosti. V tomto ohledu jsou sice mnohem mocnější generující funkce, ovšem řešení rekurencí pomocí generujících funkcí vždy obsahuje nějaký rozklad na parciální zlomky, což je nepříjemné.

Úloha 22. Najdi vzorec rekurence $a_0 = 1$ a $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ pro $n > 0$.

Řešení. Zkusme si napsat prvních pár členů této posloupnosti:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 3 + 2, \\
a_2 &= 3^2 + 3^1 2^1 + 2^2, \\
a_3 &= 3^3 + 3^2 2^1 + 3^1 2^2 + 2^3, \\
a_4 &= 3^4 + 3^3 2^1 + 3^2 2^2 + 3^1 2^3 + 2^4.
\end{aligned}$$

Zřejmě $a_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k}2^k$. Povedlo se nám najít vzorec ve tvaru řady, kterou umíme sečíst pomocí per partes.

$$S := \sum 3^{n-x}2^x\,\delta x = \left|\begin{array}{lccc} & \Delta & & \sum \\ + & 3^{n-x} & \searrow & 2^x \\ - & -2\cdot 3^{n-x-1} & \mathrm{E}\!\rightarrow & 2^x \end{array}\right| = 3^{n-x}2^x + 2\sum 3^{n-x-1}2^{x+1}\,\delta x$$

$$= 3^{n-x}2^x + \frac{4}{3}\sum 3^{n-x}2^x\,\delta x = 3^{n-x}2^x + \frac{4}{3}S.$$

Takže

$$S = \sum 3^{n-x}2^x\,\delta x = -3\cdot 3^{n-x}2^x = -3^{n+1-x}2^x + c.$$

Tudíž n-tý člen zadané posloupnosti je

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k}2^k = \sum_{0}^{n+1} 3^{n-x}2^x\,\delta x = -3^{n+1-x}2^x\Big|_0^{n+1} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Ovšem může se stát, že se nám zapsat n-tý jako součet nějaké rozumné řady nepodaří. Tohle nestane například u slavné Fibonacciho posloupnosti.

4.7 Diferenční rovnice a Fibonacciho posloupnost

Úloha 23. Najdi vzorec pro n-té Fibonacciho číslo. Fibonacciho posloupnost je rekurence $F_0 = 0, F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n > 1$.

Řešení. Označme $f(n) := F_n$. Posloupnosti můžeme analyzovat také pomocí vyšších řádů jejich diferencí. V případě Fibonacciho posloupnosti máme

$$\begin{array}{lcccccccccc} f(n) & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 \\ \Delta f(n) & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \\ \Delta^2 f(n) & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5. & & \end{array}$$

Je vidět, že posloupnost se v diferencích opakuje, pouze je posunutá. Tohle by nám mělo napovědět, že Fibonacciho posloupnost má exponenciální charakter, jelikož $\Delta^n 2^x = 2^x$ a $\Delta^n a^x = (a-1)^n a^x$. Také si všimněme, že

$$f(n) = \Delta f(n) + \Delta^2 f(n). \tag{6}$$

Tuto diferenční rovnici můžeme vyřešit téměř stejně jako odpovídající homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Nejprve uhodněme, že c^n by mohlo být řešením. Potom $\Delta c^n = (c-1)c^n$ a $\Delta^2 c^n = (c-1)^2 c^n$. Dosazením do (6) máme

$$c^n = (c-1)c^n + (c-1)^2 c^n \implies 0 = (c-1)^2 + (c-1) - 1.$$

Po pár jednoduchých úpravách získáme kvadratickou rovnici $c^2 - c - 1 = 0$, jejímž řešením je známý zlatý řež $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a jeho redukovaná verze $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Funkce f musí být nějakou lineární kombinací těchto dvou exponenciál. Tedy

$$f(n) = a\cdot\varphi^n + b\cdot\phi^n, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Navíc víme, že $f(0) = a + b = 0$ a $f(1) = a\varphi + b\phi = 1$, takže $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tímto jsme získali slavný Binetův vzorec

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^n - \phi^n\big).$$

U Fibonacciho posloupnosti ještě chvilku zůstaneme.

Úloha 24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_1 + F_2 + \cdots + F_n.$

Řešení. Již v minulé úloze jsme si všimli, že $\Delta F_n = F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$. Takže $\sum F_n = F_{n+1}$. Máme tedy

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{1}^{n+1} F_x \,\delta x = F_{x+1}\Big|_{1}^{n+1} = F_{n+2} - 1.$$

Úloha 25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2.$

Řešení. Zkusme se podívat na diferenci toho, co sčítáme, třeba to pomůže.

$$\Delta F_n^2 = \Delta(F_n F_n) = \mathrm{E}F_n \Delta F_n + F_n \Delta F_n = F_{n+1}F_{n-1} + F_n F_{n-1} = F_{n-1}F_{n+2}.$$

Hmm, tak to moc nepomohlo. Dobrá, zkusíme per partes.

$$\sum F_x^2 \,\delta x = \left|\begin{array}{cccc} & \Delta & & \sum \\ + & F_x & \searrow & F_x \\ - & F_{x-1} & \xrightarrow{\mathrm{E}} & F_{x+1} \end{array}\right| = F_x F_{x+1} - \sum F_{x-1}F_{x+2}\,\delta x$$
$$= F_x F_{x+1} - F_x^2 = F_x(F_{x+1} - F_x) = F_x F_{x-1} + c.$$

Tak nakonec nebyl ten výpočet ΔF_n^2 úplně zbytečný, tady jsme jej zužitkovali. Součet řady ze zadání úlohy tudíž je

$$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = \sum_{1}^{n+1} F_x^2 \,\delta x = F_x F_{x-1}\Big|_{1}^{n+1} = F_n F_{n+1}.$$

5 Reference

O této této fascinující metodě analýzy řad jsem se poprvé dočetl v [3], kde jsou metody hledání součtů řad probrány opravdu do hloubky. Jako neformální úvod do diskrétní analýzy také může sloužit velmi hezké video [4] od Mathologera. Dále mohu doporučit [2], kde je mimo jiné důkaz obecného vzorce pro vyjádření polynomu pomocí klesajících mocnin a Strilingových čísel.

Velká část úloh a příkladů, které jsou zde vyřešené, pochází z těchto zdrojů.

Zdroje

[1] Alexander Bogomolny. *Patterns in Pascal's Triangle*. Zář. 2016. URL: `https://bit.ly/3NQws5A` (cit. 09. 11. 2022).

[2] David Gleich. *Finite Calculus: A Tutorial for Solving Nasty Sums*. Led. 2005. URL: `https://www.cs.purdue.edu/homes/dgleich/publications/Gleich%202005%20-%20finite%20calculus.pdf` (cit. 07. 01. 2024).

[3] Robert M. Graham, Donald E. Knuth a Oren Patashnik. *Concrete mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, 1994, s. 47–56. ISBN: 0-201-55802-5.

[4] Mathologer. *Why don't they teach Newton's calculus of 'What comes next?'* Říj. 2021. URL: `https://www.youtube.com/watch?v=4AuV93LOPcE&t=170s` (cit. 07. 01. 2024).